Per tutti quelli che dopo aver dato Algebra, non vedono l'ora di passare anche Analisi 2…

Questi appunti permettono agilmente di passare l'esame orale di Analisi 2 e sono fatte apposta per permettere agli studenti di evitare di dover leggere le dispense del professore, che talvolta possono risultare difficili da capire.

Molte delle definizioni inoltre sono state dettate direttamente dal professore a ricevimento.

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

Il documento è diviso in 2 parti:

- la prima comprende tutte le definizioni che sono state spiegate durante il corso. **Viene inoltre specificato quali sono quelle chieste maggiormente all'orale e quali non è necessario sapere se vi interessa semplicemente passare l'esame**
- nella seconda parte ci sono tutti i teoremi fatti durante il corso. **Sono contrassegnati con un "sì" se è possibile che vi vengano chiesti all'esame** e con "senza dim" se la dimostrazione del teorema non è stata fatta durante il corso.

Sono inoltre state sottolineate (oppure accostate a dei punti esclamativi) le parti di appunti ritenute particolarmente importanti dal professor Longo.

Definizioni

Punti (Chiesti spesso)

1. Sfera

   Dato $x(0)\in\mathbb{R}^n$ e **$r > 0$**, $r\in\mathbb{R}$ si definisce

   1. Sfera Aperta (o intorno di centro x_0 e raggio r)
      $B(x_0, r)= B(r)(x_0) = \{ x\in\mathbb{R}^n : |x-x_0|<r\}$
   2. Sfera Chiusa di centro x_0 e raggio r
      $B(x_0, r)= B(r)(x_0) = \{ x\in\mathbb{R}^n : |x-x_0|<=r\}$

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

2. Punto interno

   Dato $x(0)\in\mathbb{R}^n$ e $\Omega\subseteq\mathbb{R}^n$, x_0 si dice interno a Ω se esiste un raggio $r\in\mathbb{R}$: $B(r)(x(0))\subseteq\Omega$ (ciò non significa necessariamente che $x(0)\in\Omega$)

3. Punto esterno

   Dato $x(0)\in\mathbb{R}^n$ e $\Omega\subseteq\mathbb{R}^n$, x_0 si dice esterno ad Ω se:
   esiste $\delta > 0$ tale che $B(\delta)(x(0))\cap\Omega=0$
   [$B(\delta)(x(0))\subseteq\mathbb{R}^n-\Omega$ (è interno al complementare di Ω)]

4. Punto di frontiera (Verificata da prof. Longo)

   Dato $x(0)\in\mathbb{R}^n$ e $\Omega\subseteq\mathbb{R}^n$, x_0 si dice punto di frontiera per Ω se:
   - per ogni $p > 0$, $\Omega\cap B(p)(x(0)) \neq 0$ **e** $\Omega^c\cap B(p)(x(0)) \neq 0$, dove Ω^c indica il complementare di Ω (non è ne interno ne esterno)

5. Punto isolato

   Dato x_0 si dice punto isolato di Ω se:
   esiste $\delta > 0$: $B(\delta)(x(0))\cap\Omega=x(0)$, cioè x_0 è l'unico punto dell'intorno di centro x_0 e raggio p è x_0.

6. Punto di accumulazione

   Dato $x(0)\in\Omega$ (!!!) e $\Omega\subseteq\mathbb{R}^n$, x_0 si dice punto di accumulazione di Ω se:
   per ogni $\delta > 0$ esiste $x\in\Omega$ $x\in B(\delta)(x(0))$ **e** $\mathbf{x \neq x_0}$
   (comunque presa una sfera di centro x_0 e raggio δ, esiste almeno un punto x interno alla sfera diverso da x_0)

7. Punto di Estremo

   CN (non sufficiente) perché x_0 sia un punto di estremo locale interno a Ω **per la funzione f: $\Omega \rightarrow \mathbf{R}$** (con $\Omega\subseteq\mathbb{R}^n$) è che $\nabla f(x_0) = 0$

8. Minimo locale
   Sia f: $\Omega \to R$, $\Omega \in \mathbb{R}^n$ e sia $x(0) \in \Omega$, si dice che x_0 è di minimo locale di f su Ω se esiste $\delta > 0$: $f(x_0) <= f(x)$ per ogni $x \in dom\, f \cap B(\delta)(x(0))$
   Nota:

Se (x_0, y_0) è un p.to di min. locale, allora
$\nabla f(x_0, y_0) = 0$ e $Hf(x_0, y_0) \geq 0$
↑ vettore ↑ matrice semi-definita pos.

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

9. Massimo locale
   Sia f: $\Omega \to R$, $\Omega \in \mathbb{R}^n$ e sia $x(0) \in \Omega$, si dice che x_0 è di minimo locale di f su Ω se esiste $\delta > 0$: $f(x_0) >= f(x)$ per ogni $x \in dom\, f \cap B(\delta)(x(0))$

10. Minimo globale
    Sia f: $\Omega \to R$, $\Omega \in \mathbb{R}^n$ e sia $x(0) \in \Omega$, si dice che x_0 è di minimo globale di f su Ω se $f(x_0) <= f(x)$ per ogni $x \in dom\, f$

11. Massimo globale
    Sia f: $\Omega \to R$, $\Omega \in \mathbb{R}^n$ e sia $x(0) \in \Omega$, si dice che x_0 è di massimo globale di f su Ω se $f(x_0) >= f(x)$ per ogni $x \in dom\, f$

master COPY COPISTERIA 050/8312126 388/9837745

Insiemi (Chiesti spesso)

12. Insieme aperto

Dato $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, si definisce che Ω è un insieme aperto se:
per ogni $x \in \Omega$, esiste p > 0: $B(p)(x) \subseteq \Omega$, cioè se ogni punto x dell'insieme Ω è interno.

13. Insieme chiuso

Dato $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, si definisce che Ω è un insieme chiuso se:
contiene tutti i suoi punti di frontiera ($I(\Omega) \subseteq \Omega$)

(il suo complementare $\Omega^c = \mathbb{R}^n \setminus \Omega$ è aperto)
(contiene tutti i suoi punti di accumulazione)

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

14. Insieme limitato

Dato $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, si definisce che Ω è un insieme limitato se:
esiste δ > 0: per ogni $x \in \Omega$, |x| <= δ se $\Omega \subseteq B(\delta)(0)$ (centro nell'origine!!!)
(oppure esiste $x(0) \in \mathbb{R}^n$ ed un numero reale **positivo** p : $\Omega \subseteq B(p)(x(0))$,
ovvero esiste un raggio tale che una sfera con tale raggio lo possa contenere)

15. Insieme connesso (Verificata dal Prof. Longo)

Dato $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, si definisce che Ω è un insieme connesso se:
per ogni $x, y \in \Omega$, esiste una funzione **continua (non necessariamente costante!)** γ: [a, b] →Ω : γ(a) = x e γ(b) = y , con **γ appartenente ad Ω.**
(cioè se presi 2 punti qualsiasi $x, y \in \Omega$, esiste una curva parametrica (o arco) γ continua appartenente ad Ω che congiunge i 2 punti)

16. Insieme semplicemente connesso

Dato $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, si definisce che Ω è un insieme semplicemente connesso se ogni curva **chiusa** γ:[0,1]→ Ω è omotopa **in Ω(!!!)** ad una curva **costante** □(□)≡□ per ogni t in [0,1]

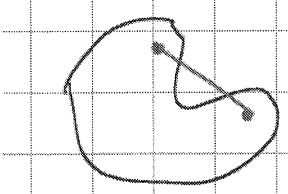
(Nota: Ω si dice semplicemente connesso se ogni curva **chiusa** in esso si può deformare in una curva costante senza uscire da Ω, ovvero se non ci sono "buchi".)

17. Insieme convesso

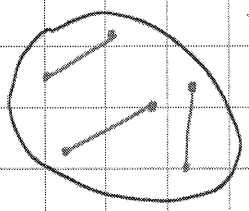
Dato $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, si definisce che Ω è un insieme convesso se:
per ogni $x, y \in \Omega$, per $\lambda \in [0,1], (1-\lambda) * x + \lambda * y \in \Omega$
(cioè se per ogni $x, y \in \Omega$, esiste una funzione **continua e** costante
γ: [a, b] →Ω : γ(a) = x e γ(b) = y , con **γ appartenente ad Ω.**)

(NOTA GOBBINO)

L'insieme di definizione di f(x,y) deve a sua volta essere un insieme connesso (comunque prendo 2 p.ti, il segmento che li congiunge è contenuto nell'insieme)



non connesso



connesso

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

18. Insieme compatto (soprattutto per gli esercizi)
Dato $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, si definisce che Ω è un insieme compatto se è **chiuso e limitato.**

19. Insieme a stella (rispetto ad x(0))
Un insieme verrà detto a stella se esiste $x(0) \in \Omega$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ tale che il **segmento** $x(0)x \subseteq \Omega$ per ogni $x \in \Omega$.
(Gli insiemi a stella sono semplicemente connessi, quindi ogni curva chiusa può essere deformata in x(0))

20. (Diametro di un insieme)
(Si chiama Diametro dell'insiema B (limitato) la grandezza diam B= sup p(x,y) con $x \in B, y \in B$)

MASTER COPY
COPISTERIA
050/8312126 388/9837745