

Algebra Lineare - Ingegneria Informatica -

Prof. Longo

2019 - 2020

Iacopo G.

Guida alla risoluzione degli esercizi dell'esame scritto



INDICE

1. Prodotto tra matrici....3
2. Matrice Inversa....4
3. Matrice cambio di base....4
4. Equazione matriciale....5
5. Determinante di una matrice....5
6. Dimensione dell'immagine e del nucleo....7
7. Applicazione lineare suriettiva, iniettiva o biiettiva....8
8. Vettore nucleo di una applicazione lineare....8
9. Coordinate vettore rispetto ad una base....9
10. Minima distanza tra le rette....10
11. Proiezione vettore su uno span....11
12. Area del triangolo....12
13. Forme quadratiche....13
14. Coseno angolo compreso tra due vettori....13
15. Volume parallelepipedo....14
16. Complemento ortogonale....14
17. Retta rispetto al piano....15
18. Equazione parametrica della bisettrice di un angolo...16
19. Equazione implicita del piano parametrico....17
20. Equazione del piano perpendicolare ad una retta....18
21. Il sottospazio intersezione....19/20
22. Posizione rette nello spazio....21
23. Proiezione in C....22
24. Diagonizzabilità....24
25. FORMULARIO GENERALE....29

Master Copy

PRODOTTO TRA MATRICI

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

AB è la matrice prodotto con il numero di righe di A e il numero di colonne di B

master COPY

L'elemento $AB_{ij} = \sum_{h=1}^{n} A_{ih} * B_{hj}$



$$AB = \begin{bmatrix} AB_{11} & AB_{12} & AB_{13} \\ AB_{21} & AB_{22} & AB_{23} \\ AB_{31} & AB_{32} & AB_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 2 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$AB_{11} = A_{11} * B_{11} + A_{12} * B_{21} = (2 * 1) + (1 * 0) = 2$$
$$AB_{12} = A_{11} * B_{12} + A_{12} * B_{22} = (2 * 1) + (1 * 2) = 4$$
$$AB_{13} = A_{11} * B_{13} + A_{12} * B_{23} = (2 * -1) + (1 * 1) = -1$$

$$AB_{21} = A_{21} * B_{11} + A_{22} * B_{21} = (2 * 1) + (-1 * 0) = 2$$
$$AB_{22} = A_{21} * B_{12} + A_{22} * B_{22} = (2 * 1) + (-1 * 2) = 0$$
$$AB_{23} = A_{21} * B_{13} + A_{22} * B_{23} = (2 * -1) + (-1 * 1) = -3$$

$$AB_{31} = A_{31} * B_{11} + A_{32} * B_{21} = (0 * 1) + (1 * 0) = 0$$
$$AB_{32} = A_{31} * B_{12} + A_{32} * B_{22} = (0 * 1) + (1 * 2) = 2$$
$$AB_{33} = A_{31} * B_{13} + A_{32} * B_{23} = (0 * 1) + (1 * 1) = 1$$

NOTA: Per essere moltiplicabili il numero delle colonne di A deve essere uguale al numero delle righe di B.

MATRICE INVERSA

Si pone la matrice = alla base canonica, si esegue Gauss-Jordan fino a quando la matrice di sinistra non è uguale alla base canonica. Il risultato è la matrice di destra.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



$$\text{II} + \text{I} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

L'inversa non esiste!!

NOTA: Per verificare se è possibile invertire una matrice è necessario calcolare il determinante e controllare che questo sia diverso da 0 (zero)

MATRICE CAMBIO DI BASE

Dalla base $\{(1,0,0), (1,1,0), (1,1,1)\}$ alla base $\{(1,-1,0), (1,1,2), (1,1,-1)\}$

Si mettono i vettori in colonna!

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Si pone la prima matrice uguale alla base canonica

$$\begin{matrix} \text{I} - \text{II} \\ \text{II} + \text{III} \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} \longrightarrow \textbf{SOLUZIONE}$$

EQUAZIONE MATRICIALE

$\underline{AX = B} \longrightarrow \begin{bmatrix} A_{11} & \dots & A_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{m1} & & A_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1 \\ \vdots \\ B_p \end{bmatrix}$



$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{I + II}} \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \longrightarrow$

$\text{II} - \frac{2}{3}\ \text{I} \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 1/3 \end{bmatrix}$ I/3 e II * -1 $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -2/3 \\ -1 & -1/3 \end{bmatrix}$

Permuto le righe $\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -1/3 \\ 0 & -2/3 \end{bmatrix} \longrightarrow$ **SOLUZIONE**

DETERMINANTE DI UNA MATRICE

- 2X2

$$\det(A) = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = A_{11} * A_{22} - A_{21} * A_{12} = 3$$



- 3X3

$$\det(A) = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}$$