MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

Definizioni più chieste all'orale

Spazio Vettoriale
Spazio in cui valgono **tutte le proprietà della somma tra vettori e del prodotto con gli scalari.**
Inoltre in uno spazio vettoriale si verificano le seguenti proprietà:

- 0*x=0 per ogni x
- se a*x =0 allora o a =0 oppure x =0 (legge dell'annullamento del prodotto)

Norma di un vettore (GENERALE)
La norma è un operatore che assegna ad ogni vettore u uno scalare (la sua lunghezza) e che gode delle seguenti proprietà:

- |u|>=0
- |u|=0 <=> u=0
- |a*u|=|a|*|u|, ove |a| rappresenta il modulo reale o complesso dello scalare a
- |x+y|<=|x|+|y| (Disuguaglianza Triangolare)

Prodotto scalare
Siano x e y vettori appartenenti a Rn/ Cn. Si definisce il prodotto scalare di x e y la funzione (x,y)-> xy tale che $xy=\sum_{i=1}^{n} x(i)*(y'(i))$, dove y'(i) indica il coniugato di y(i).

In generale il prodotto scalare verifica le seguenti proprietà:

- x*x>= 0
- x*x=0 solo se x=0
- y*x= **(x')*(y')**
- (a*x+b*y)*z= **(a')** *x*z+**(b')** *y*z
- x(a*y)=**(a')*** x * y (l'apostrofo indica il coniugato)

MASTER C...
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

Spazio Euclideo
Uno spazio vettoriale in cui valgono anche le proprietà della somma tra vettori, del prodotto per uno scalare e del prodotto scalare si dice SPAZIO EUCLIDEO

PROIEZIONE IN GENERALE
Una proiezione è una funzione P(u) che associa ad un vettore u un altro vettore v che rispetta le seguenti 2 proprietà:

- P(u + w)= P(u) +P(w) , P(a*u)= a*P(u) [Linearità]
- P(P(u))=P(u) [Idempotenza]

Proiezione ortogonale di x in direzione di y (sia che $x, y \in \mathbb{R}^n$, sia che $x, y \in \mathbb{C}^n$)
In Rn o in Cn, utilizzando i relativi prodotti scalari, è possibile definire la proiezione di un vettore u nella direzione di y (**con y!= 0**) ponendo:

$$X_y=((x*y)/|y|^2)*y$$

Proprietà della Proiezione:

- $(x+y)_z= x_z+y_z$
- $(ax)_z =a* x_z$
  (Le ultime due proprietà indicano che **la proiezione è lineare**)
- $(x_z)_z=x_z$ (**la proiezione è idempotente**)
- $a*(y_y)=a* y$
- $(x-x_y)*y= 0$

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

Proiezione di u su uno spazio formato da un SISTEMA ORTOGONALE
Sia X euclideo e siano e(1), e(2) … e(n) i vettori di un **sistema ortogonale**. Si pone allora **u <e(1), e(2), … , e(n)> = sommatoria (u <e(i)>)** . Tale risultato si chiamerà proiezione di u sullo spazio generato da e(1), e (2), … , e(n).

Proprietà della Proiezione:
(u- u <e(1), e(2), … , e(n)>) * e(i) =0 per ogni i= 1, 2, … , n
(Ortogonalità del resto)

Se e(1), e(2) … e(n) è un sistema ortogonale, la proiezione di u su di esso è la combinazione lineare e(1), e(2) … e(n) di **minima distanza** cioè quella che meglio approssima u.

Proiezione su uno span (NON PER FORZA UN SISTEMA ORTOGONALE)
La proiezione del vettore u su uno span <e(1), …., e(n)>, con e(1), …., e(n) indipendenti, viene definito così $u_{<e(1), \ldots, e(n)>} = \sum_{i=1}^{n} b(i)*e(i)$, dove (b(1), …, b(n)) è **l'unica soluzione del sistema** $\sum_{i=1}^{n} a(i)*e(i)*e(j)=u*e(j)$, dove j= 1, …, n, che esisterà e sarà unica per ogni u.

La proiezione è un elemento di <e(1), …., e(n)> tale che $x-x_{<e(1), \ldots, e(n)>}$ è ortogonale a tutti i vettori e(1), …., e(n) e quindi a <e(1), …., e(n)>.

Coseno dell'angolo
Siano x e y vettori non nulli.
Si definisce il coseno formato da x e y ponendo cos ($\hat{xy}$)=(x*y)/(|x|*|y|), dove x*y cambia a seconda se siamo in $\mathbb{R}^n$ o in $\mathbb{C}^n$.

Distanza tra vettori
Per ogni coppia di vettori x e y in qualsiasi spazio (non necessariamente vettoriale o normato) si definisce la distanza come d(x, y)=|x-y|.

Proprietà della Distanza:

- d(x, y) >=0
- d(x, y) =0 se x=y
- d(x, y) =d(y, x)
- d(x, y) <= d(x, z)+d(z, y) (Disuguaglianza triangolare)

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

Combinazione lineare di vettori
Un vettore x si dice che è combinazione lineare di altri n vettori se sommando multipli di quei vettori si può ottenere x.

Sottospazio
Sia X uno spazio vettoriale e sia Y un sottoinsieme di X tale che $Y \subseteq X$. Y è un sottospazio di X se verifica i seguenti 2 casi:

- per ogni $y, y' \in Y$ si ha che $y+y' \in Y$
- per ogni $y \in Y$ si ha che $a*y \in Y$, per ogni $a \in \mathbb{R}$

Sottospazio affine
Un sottoinsieme X contenuto in uno spazio vettoriale si dirà sottospazio affine se esistono x(0), u(1),...., u(n) tali che X=x(0)+<u(1), u(2), …, u(n)> . Ogni vettore appartenente ad X si dirà "spostamento" sullo spazio X. La dimensione di <u(1), u(2), …, u(n)> si dirà dimensione di X.

Sistema ortogonale
Sia X uno spazio euclideo. Un insieme **finito** di vettori e(1), e(2), …, e(n) si dice sistema ortogonale se:

1. e(i)*e(j) =0 se i ≠ j
2. e(i)*e(j) ≠0 se i = j

Sistema ortonormale
Sia X uno spazio euclideo. Un insieme finito di vettori e(1), e(2), …, e(n) si dice sistema ortogonale se:

1. e(i)*e(j) =0 se i ≠ j
2. e(i)*e(j) =1 se i = j

Complemento ortogonale
Sia X uno spazio euclideo di dimensione **finita** e sia $Y \subseteq X$. Si definisce allora Complemento ortogonale di Y rispetto a X ponendo

$$Y\perp ¿ \;=\; \{x \in X : x*y = 0 \; per \; ogni \; y \in Y\}$$

Dipendenza lineare
Un sottoinsieme di uno spazio vettoriale è detto linearmente dipendente se uno dei suoi vettori generatori è combinazione lineare degli altri.

Indipendenza lineare
Un insieme di vettori u(1), u(2), …, u(n) è linearmente indipendente se e solo se $\sum a(i)*u(i)=0$ con $a(i)=0, i=1,\dots,n$ (ovvero se nessuno degli u(i) si può esprimere come combinazione lineare degli altri).

Base
Dato uno spazio vettoriale X di dimensioni **finite n**, una sua base è un insieme finito di vettori $x(1), x(2), \dots x(n) \in X$ tali che:

- X= <x(1), x(2), … , x(n)>
- x(1), x(2), … , x(n) sono indipendenti

In sostanza una base è un **sistema di generatori indipendenti.**

Somma diretta di SOTTOSPAZI
Sia X uno spazio vettoriale e siano X(i) con i=1, …, n n suoi **sottospazi**. Posto $\sum_1^n X(i)=\{\sum_1^n x(i): x(i)\in X(i)\}$ il loro spazio somma, si dirà che tale somma è diretta e si scriverà $\sum_1^n X(i)=+X(i)$ se e solo se $x(i)\in X(i)$, $\sum_1^n x(i)=0$ => x(i)=0 per ogni i=1, …, n.

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

Sottospazio somma
Dati X e Y sottospazi di Z, allora si definisce il sottospazio somma di X e Y:

$$X+Y=\{z\in Z : esiste\ almeno\ x\in X\ ed\ esiste\ almeno\ y\in Y\ verificanti\ z=x+y\}$$

Tale insieme è un sottospazio, ossia contiene multipli scalari dei proprio elementi, così come sono definiti in Z.

Matrice Associata
Sia A: X->Y, con A lineare e X e Y di dimensioni **finite**. Siano poi e(1)... e (n) una base di X e e'(1)... , e'(m) una base di Y.

Si definisce la matrice associata ad A la matrice A(ij) avente come colonna j-esima

$$A(e(j))=\sum_{i=1}^{m} A(ij)*e'(i)$$

In definitiva, la matrice A(ij) associata a A verifica

$$A(x)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} A(ij)*x(j)*e'(i) \quad \textbf{, ove} \quad x=\sum_{j=1}^{n} x(j)*e(j) \ .$$

Matrice cambio di base
Sia X uno spazio vettoriale di dimensione finita, e siano e(1).. e(n) ed e'(1)... e'(n) due basi di X.

La matrice di cambio di base **da e(1).. e(n) a e'(1)... e'(n)** è definita come la matrice avente come colonne le coordinate di ciascuno dei vettori e'(1)... e'(n) rispetto alla base <e(1) … , e(n)> , e cioè M=(m(ij)), ove $e'(j)=\sum_{i=1}^{n} m(ij)*e(i)$.

Prodotto di matrici
Date $A\in\mathbb{R}^{(m*n)}, B\in\mathbb{R}^{(n*p)}$ si definisce la matrice $AB\in\mathbb{R}^{(m*p)}$ ponendo AB(ij)= $\sum_{h=1}^{n} A(ih)*B(hj)$. (Per essere moltiplicabili il numero di colonne di A deve coincidere con il numero di righe di B).

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

Matrice invertibile/ inversa
Una matrice $A\in\mathbb{R}(n*n)$ si dirà invertibile se esiste una matrice $X\in\mathbb{R}(n*n)$, detta matrice inversa, tale che X*A= I.

Teorema Matrice invertibile
Condizione necessaria e sufficiente affinchè la matrice $A\in\mathbb{R}(n*n)$ sia invertibile è che le sue colonne siano indipendenti e cioè che formino una base per R(n).

Matrice Trasposta (solo per le matrici Reali)
Data la matrice reale $A\in\mathbb{R}^{(m*n)}$, si definisce la matrice trasposta $A(T)\in\mathbb{R}^{(n*m)}$, ponendo A(T)(ij)=A(ji).

Matrice Aggiunta (solo per le matrici Complesse)
Data la matrice complessa $A\in\mathbb{C}^{(m*n)}$, si definisce la matrice aggiunta $A'\in\mathbb{C}^{(n*m)}$ ponendo A'(ij)= $\hat{A}(ji)$ (coniugato di A(**ji**)).

Matrice Autoaggiunta
Una matrice A si dice autoaggiunta se A(**ij**)= $\hat{A}(ji)$, dove $\hat{A}(ji)$ indica la matrice **trasposta coniugata** di A. (Affinchè una matrice sia autoaggiunta, tutti gli elementi della sua diagonale devono essere reali e la matrice deve essere quadrata).

Matrice Regolare/Singolare
Data una matrice A ($A\in\mathbb{R}(n*n)$), si dirà che A è regolare se le sue colonne sono indipendenti e singolare altrimenti.