• TEOREMI E DEFINIZIONI ALGEBRA / GEOMETRIA

ALGEBRA insieme di operazioni, teoremi per studiare il RAPPORTO TRA NUMERI a più livelli

DEFINIZIONI

1. $\mathbb{R}^n = \{ (a_1, a_2, a_3 \dots a_n) : a_i \in \mathbb{R} \ \forall \ i = 1 \dots n \}$

due elementi appartengono a $\mathbb{R}^n \Rightarrow$

$a, b \in \mathbb{R}^n \iff a \equiv (a_1, a_2 \dots, a_n)$

$b \equiv (b_1, b_2, \dots, b_n)$

le coordinate sono dei REALI

2. le OPERAZIONI TRA VETTORI definibile in $\mathbb{R}^n$,

SOMMA VETTORI in $\mathbb{R}^n$ $a + b \equiv (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3, \dots, a_n + b_n)$

↳ cioè una somma membro a membro, uno a uno

PROD. SCALARE PER VETTORE (cioè multiplo di un VETT.)

↳ $\lambda \in \mathbb{R}$ è cioè uno scalare

$a \in \mathbb{R}^n$ cioè un vettore con n componenti

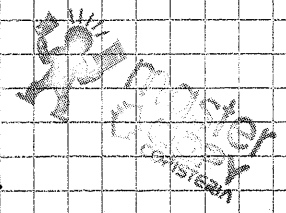
$\lambda \cdot a \equiv (\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3 \dots \lambda a_n)$

3. VETTORE NULLO, il vettore $0 (0, 0, 0 \dots, 0)$, cioè il vettore che sommato ad un altro vettore lo lascia INALTERATO

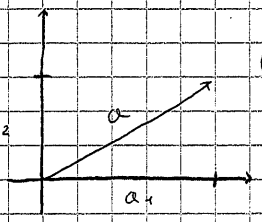
4. VETTORE OPPOSTO se $a \equiv (a_1, a_2, \dots, a_n)$ il suo opposto $(-a) \equiv (-a_1, -a_2, \dots, -a_n)$

cioé equivale a prendere (a) e moltiplicare per uno scalare cioé $(\lambda = -1)$.

↳ (NB) se sommiamo 2 VETTORI OPPOSTI otteniamo il VETTORE NULLO.



. RAPP. GRAFICA.



. vettore pensato con parte motivo nell' ORIGINE

5. LUNGHEZZA del VETTORE → NORMA

in $\mathbb{R}^2$ come sopra $|a| = \sqrt{(a_1)^2 + (a_2)^2}$

in $\mathbb{R}^n$, generale:

$$|a| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 \dots a_n^2}$$

PROPRIETÁ della NORMA

(1). $|a| \geq 0$ $\forall a \in \mathbb{R}$, la norma é CERTAMENTE maggiore di ZERO, nel caso in cui non lo sia tutte le sue componenti sono ZERO

norma nulla o POSITIVA

(2). $|a| = 0 \iff$ il vettore é un PUNTO

(3). $|a| = 0 \iff a \equiv O\,(0,0 \dots 0)$ VETTORE NULLO

- MULTIPLO NORMA

6. $|\lambda \cdot a| = \sqrt{\lambda^2 a_1^2 + \lambda^2 a_2^2 + \dots \lambda^2 a_n^2}$

$= \sqrt{\lambda^2 (a_1^2 + a_2^2 \dots a_n^2)} =$) porto fuori (λ)

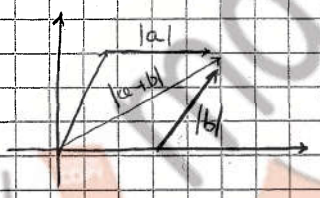
$= (|\lambda|) \cdot |a|$

$|\lambda|$ → valore assoluto

$|a|$ → norma di $a \in \mathbb{R}^n$

- DIS. TRIANGOLARE

7. $|a+b| \leq |a| + |b| \quad \forall\, a, b \in \mathbb{R}^n$



- nello parallelogramma diagonale è minore della somma dei lati

- (3) PROPRIETÁ NORMA

1) norma NULLA oppure POSITIVA
2) OMOGENEITÁ della norma
3) DISUGUAGLIANZA TRIANGOLARE

- PROPRIETÁ SOMMA VETTORI e PROD. SCAL./VETT.

5) $b + a \to a + b$ commutative

6) $(a+b) + c \Rightarrow a + (b+c)$ associativa (somma)

7) $\lambda(\mu a) \Rightarrow (\lambda a)\mu$ associativa (prodotto)

8) $\lambda(a+b) \Rightarrow \lambda a + \lambda b$ distributiva

• se ho definite queste precedenti (4) PROPRIETÁ, ed inoltre ho:

1 VETTORE OPPOSTO

2 ELEM. NEUTRO SOMMA 0 $(0, 0, \dots, 0)$

3 " " PRODOTTO $(1 \in \mathbb{R})$ $x = 1 \cdot x$

con $(x \in \mathbb{R}^n)$

allora parliamo di uno

SPAZIO VETTORIALE.

(NB) → esiste un sotto insieme dello SPAZIO - VETTORIALE dove ogni vettore ha DEFINITA una NORMA, allo spazio si dice:

SPAZIO NORMATO.

• DEFINIZIONE PRODOTTO SCALARE

8. $(a, b) \in \mathbb{R}$, ie risultato che otteniamo prende il nome di prodotto scalare ed è di tutto uno SCALARE cioè $(\in \mathbb{R})$.

$$\text{PROD. SCALARE} \equiv \sum_{i=1}^{n} (a_i \cdot b_i)$$

• faccio i prodotti tra le componenti ad una ad una e poi le SOMMO tra LORO

→ PROPR. PRODOTTO SCALARE $\left[a \cdot b = \sum_{i=1}^{n} (a_i \cdot b_i) \right]$

↳ ma se $(a \cdot a) = \sum_{1}^{n} (a_i \cdot a_i) = (|a|^2)$ cioè la NORMA al QUADRATO

1) $a \cdot a \geq 0$ qualsiasi sia $a \in \mathbb{R}^n$

2) $a \cdot a = 0 \iff a = 0$ vettore nullo

3) $(b \cdot a) = \sum_{1}^{n} (a_i \cdot b_i) = (a \cdot b)$ SIMMETRIA

4) $a(b+c) = ba + ac$?

DIMO// $(a(b+c)) = \sum_{1}^{n} a_i \cdot (b_i + c_i) =$

$= \sum_{1}^{n} a_i b_i + \sum_{1}^{n} a_i \cdot c_i = (ab + ac)$

LINEARITÁ VERIFICATA

5) $a(b \cdot c) \neq (a \cdot b) \cdot c$

ASSOCIATIVITÁ non VALIDA, ATTENZIONE !!!

• **SPAZIO EUCLIDEO** sotto insieme dello SPAZIO VETTORIALE, dove sono definite le precedenti e seguenti proprietà del prod. SCALARE

1) $a \cdot a \geq 0$
2) $a \cdot a = 0 \iff a = 0$
} DEFINITO e positivo

3) $a \cdot b \iff b \cdot a$ SIMMETRIA

4) $a(b+c) \iff (a+b)c$

$c(\lambda a + \mu b) \iff \lambda ac + \mu bc$
} Bilinearità