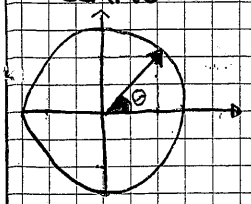
$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ $\quad f(\underbrace{x_1 \dots x_n}_{x \in \mathbb{R}^n}) = \begin{pmatrix} f_1(x_1 \dots x_n) \\ \vdots \\ f_m(x_1 \dots x_n) \end{pmatrix} \to f(x) \in \mathbb{R}^m$

DEF CURVA PARAMETRICA O MOTO

Cambiamento della posizione di un corpo in funzione del tempo

$\gamma: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ è una legge che descrive in che modo si muove un oggetto

ESEMPIO...



asse x: $\cos\theta$
asse y: $\sin\theta$

$\theta \in \mathbb{R} : 0 \le \theta \le 2\pi$

EQUAZIONE: ① $x^2 + y^2 - 1 = 0$

② $\gamma(\theta) = \begin{cases} \cos\theta \\ \sin\theta \end{cases}$

MASTER CC...
Tel 050 831 21 25
Cell. 388 98 ...

Potrei scrivere $\gamma(\theta) = \begin{cases} \cos 2\theta \\ \sin 2\theta \end{cases}$ → è la stessa curva che viaggia a velocità doppia.

DEF FUNZIONI SCALARI DI VARIABILI VETTORIALI

Sono funzioni da $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

ESEMPIO...

$f: [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$ Un esempio tipico è la CARTA TOPOGRAFICA: per ogni punto della costa posso trovare l'altezza sul livello del mare

DEF SUPERFICI PARAMETRICHE

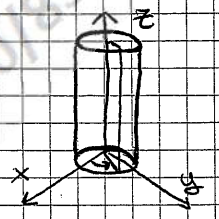
Sono funzioni da $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$

ESEMPIO... equazione del piano

$\psi(\alpha, \beta) = x_0 + \alpha u + \beta v$ $\quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $x_0, u, v \in \mathbb{R}^3$, u, v indipendenti

- CILINDRO

$\phi(\theta, t) = \begin{cases} \cos\theta \\ \sin\theta \\ t \end{cases}$

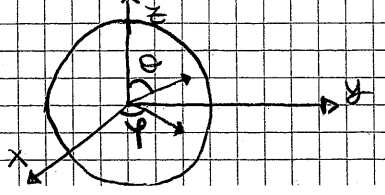


- SFERA

$\phi(\theta, \varphi) = \begin{cases} x = \sin\theta \cos\varphi \\ y = \sin\theta \sin\varphi \\ z = \cos\theta \end{cases}$ OPPURE $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

$\theta \in [0, \pi]$
$\varphi \in [0, 2\pi]$ $\Rightarrow \phi: [0,\pi] \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$ PRODOTTO CARTESIANO:

$(x(\theta,\varphi), y(\theta,\varphi), z(\theta,\varphi))$



DEF SUCCESSIONE DI VETTORI in $\mathbb{R}^N$

È una funzione da $\mathbb{N}$ in $\mathbb{R}^N$ $\quad x_n = \begin{pmatrix} x_n^1 \\ x_n^2 \\ \vdots \\ x_n^N \end{pmatrix}$ $\quad x_n : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^N$

Posso vedere la successione di vettore come tante successioni scalari

ESEMPIO... Successione in $\mathbb{R}^4$

$$a_n = \begin{pmatrix} 1/n \\ n^2 \\ \sin n \\ n! \end{pmatrix}$$

DEF SUCCESSIONE LIMITATA (DI VETTORI)

$$\exists M : \quad -M \le a_n \le M \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \equiv \quad \exists M : \|a_n\| \le M \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

↳ è contenuta nell'origine

DEF DISTANZA $\quad d(x,y) = \|x - y\|$

$f : X \times X \to \mathbb{R}$

- $d \ge 0 \quad \forall x,y \in X$
- $d(x,y) = 0 \iff x = y$
- $d(x,y) = d(y,x) \quad \forall x,y \in X$
- $d(x,z) \le d(x,y) + d(y,z)$ ≡ DISUGUAGLIANZA TRIANGOLARE valido $\forall x,y,z \in X$

DEF SUCCESSIONE DI VETTORI CONVERGENTE AD a

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists r : \forall n > r \quad \|a_n - a\| < \varepsilon \quad \text{e cioè} \quad \lim_{n \to +\infty} \|a_n - a\| = 0$$

ni ↵

DEF SUCCESSIONE DI VETTORI DIVERGENTE

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists r : \forall n > r \quad \|a_n\| > \varepsilon \quad \text{e cioè se} \quad \lim_{n \to +\infty} |a_n| = +\infty$$

perché per ogni sfera scelta esiste r per cui la successione sta tutta fuori dalla sfera da un certo n in poi

ESEMPIO...

$$a_n = \begin{pmatrix} 1/n \\ n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \qquad \left\| \begin{pmatrix} 1/n \\ n \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{\frac{1}{n^2} + n^2} = \sqrt{\frac{1+n^4}{n^2}} > \varepsilon$$

Mi basta prendere un $n > \varepsilon$ quindi $\left\| \begin{pmatrix} 1/n \\ n \end{pmatrix} \right\| > n > [\varepsilon] + 1 \to r = [\varepsilon] + 1$

ESEMPIO... (CONVERGENTE)

$$a_n = \begin{pmatrix} \frac{n-1}{n} \\ \frac{1}{n} \end{pmatrix} \qquad \lim_{n \to +\infty} a_n = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

MASTER COPY
Tel. 050 831226
Cell. 388 9837745
Master Copy Corsi e Dispense 050 831226 388 9837745

PROVIAMOLO CON LA DEFINIZIONE...

$$\|a_n - a\|^2 = \left\| \frac{n-1}{n} - 1, \frac{1}{n} - 0 \right\|^2 = \left\| -\frac{1}{n}, \frac{1}{n} \right\|^2 = \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2}$$

$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2} \longrightarrow 0$ È INFINITESIMA

ESEMPIO... (DIVERGENTE)

BASTA CHE NE DIVERGA 1
VISTO CHE È UNA SOMMA FINITA A TERMINI POSITIVI = NORMA

$$a_n = \begin{pmatrix} (-1)^n \cdot n \\ \frac{1}{n} \end{pmatrix} \qquad \|a_n\|^2 = n^2 + \frac{1}{n^2} \qquad \lim_{n\to+\infty} n^2 + \frac{1}{n^2} = +\infty$$ (BASTA CHE NE SCOPPI 1)

DEF SUCCESSIONE LIMITATA

$\exists\, \varepsilon > 0 : \forall n \quad \|a_n\| \le \varepsilon \quad \forall n \in \mathbb{N}$



a_n sta in una SFERA di centro l'origine e raggio ε

ESEMPIO... (LIMITATA)

$$a_n = \begin{pmatrix} \cos 2n \\ \sin n \end{pmatrix} \qquad \|a_n\|^2 = \underbrace{\cos^2 2n}_{\in [0,1]} + \underbrace{\sin^2 n}_{\in [0,1]} \le 1 + 1 = 2$$

a_n starà in una sfera di centro l'origine e raggio $\varepsilon = 2$

LEMMA (STIMA DELLA NORMA CON I MODULI DELLE COMPONENTI)

$\forall\, x \in \mathbb{R}^N$

① $\|x\| \ge \|x_i\| \quad \forall i \in 1 \dots N$ ≡ STIMA DAL BASSO

② $\|x\| \le \sqrt{N} \cdot \max \|x^i\| \quad i \in 1 \dots N$ ≡ STIMA DALL'ALTO

DIMOSTRAZIONE ①

$$\|x\|^2 = \sum_{j=1}^{N} (x_i)^2$$

$$\sqrt{\|x\|^2} \ge \sqrt{(x_i)^2} = \|x_i\|$$

ESEMPIO... LEMMA ①

$$a_n = \begin{pmatrix} (-1)^n \cdot n \\ \frac{1}{n} \end{pmatrix} \qquad \|a_n\| \ge \|(-1)^n \cdot n\| = n$$

Visto che la ① è verificata a_n DIVERGE

DIMOSTRAZIONE ②

$$\|x\|^2 = \sum_{j=1}^{N} (x^j)^2$$

al posto di tutti gli x^j sostituisco quello di valore massimo a tutti gli altri

$$\|(1,2,3)\| = \sqrt{1+4+9} = 9+9+9$$

$$\sum_{j=1}^{N} (x^j)^2 \le N \max_{j=1\dots N} (x^j)^2 = N \left[\max_{j=1\dots N} |x^j|\right]^2$$

↳ modulo = norma perché $(-3)^2 > (2)^2$, $|-3| > |2|$

↳ MODULO = NORMA

$$\|x\| \le \sqrt{N} \cdot \max_{j=1\dots N} |x^j|$$

TH. CONVERGENZA VETTORI E COMPONENTI (USO del LEMMA precedente)

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = a \iff \lim_{n\to+\infty} a_n^i = a^i \quad \forall i = 1\dots N$$

DIMOSTRAZIONE

1) $\Rightarrow$ SE CONVERGONO i VETTORI CONVERGONO LE COMPONENTI

$$\|a_n - a\| \ge \|a_n^i - a^i\| \ge 0$$

Uso la ① del LEMMA precedente

$\|a_n - a\| \to 0$ (ipotesi)

$\|a_n^i - a^i\| \to 0$ × il th dei carabinieri

2) $\Leftarrow$ SE CONVERGONO LE COMPONENTI CONVERGONO i VETTORI

$$0 \le \|a_n - a\| \le \sqrt{N} \cdot \max \|a_n^i - a^i\|$$

Uso la ② del LEMMA precedente

$\max \|a_n^i - a^i\| \to 0$ (ipotesi)

$\|a_n - a\| \to 0$ × il th dei carabinieri

TH. COMPONENTI TUTTE LIMITATE ⟶ SUCCESSIONE LIMITATA (USO IL LEMMA precedente)

OBBIETTIVO $\Rightarrow$ $\exists \varepsilon > 0 : \|a_n\| < \varepsilon \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$$\|a_n\| \le \sqrt{N} \cdot \max \|a_n^i\| \le \sqrt{N} \max_{i=1\dots N} k_i = \varepsilon$$

↳ massimo dei TAPPI

Suppongo a_n^i LIMITATA

$\exists k_i > 0 : \|a_n^i\| < K_i \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Uso la ② del LEMMA precedente

DEF FUNZIONE CONTINUA IN $x_0 \in \Omega$

$f: \Omega \to \mathbb{R}^m$ con $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \forall x \in \Omega \ \underbrace{\|x - x_0\|}_{\mathbb{R}^n} < \delta \longrightarrow \underbrace{\|f(x) - f(x_0)\|}_{\mathbb{R}^m} < \varepsilon$

TH. FUNZIONI CONTINUE

IPOTESI : $a_n \to a$
f continua in a.
f definito su $a_n \ \forall n$

TESI : $f(a_n) \to f(a)$

DIMOSTRAZIONE

TESI : $\forall \varepsilon > 0 \ \exists r : \forall n > r \ \|f(a_n) - f(a)\| < \varepsilon$

IPOTESI : ① $\forall \sigma > 0 \ \exists r : \forall n > r \ \|a_n - a\| < \sigma$

② $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta : \forall x \in \text{dom} f \ \|x - a\| < \delta \to \|f(x) - f(a)\| < \varepsilon$

$\|f(a_n) - f(a)\| < \varepsilon$ È VERA SE : • $a_n \in \text{dom} f$
• $\|a_n - a\| < \delta$

Dalla convergenza $\exists r : n > r \ \|a_n - a\| < \delta$ con $\sigma = \delta$

TH. DELLA SOMMA (uguale per la differenza)

IPOTESI : $a_n \to a$
$b_n \to b$

TESI : $a_n + b_n \to a + b = \forall \varepsilon > 0 \ \exists r : \forall n > r \ \|a_n + b_n - (a+b)\| < \varepsilon$

DIMOSTRAZIONE

$0 \leq \|a_n - a + b_n - b\| \leq \|a_n - a\| + \|b_n - b\|$

$0 \to$ (per ipotesi) 0

0 × il th dei carabinieri

LEMMA DI CONTINUITÀ DELLA NORMA

$\big|\, \|x\| - \|y\| \,\big| \leq |x - y|$

DIMOSTRAZIONE

$|x| = |x - y + y| \leq |x - y| + |y|$
$|y| = |y - x + x| \leq |y - x| + |x|$

$\Rightarrow$ sottraggo membro a membro $\Rightarrow |y| - |x| \leq |x - y| \Rightarrow \big|\, \|y\| - \|x\| \,\big| \leq |x - y|$

MASTER CENTER
Tel. 030 6312126
Cell. 388 9935745