DEF. LIMITI.

(1) $f: \Omega \to \mathbb{R}$ $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : |x - x_0| < \delta \ x \in \text{dom} f \ x \neq x_0 : f(x) > \varepsilon$

(2) $f: \Omega \to \mathbb{R}^m$ $\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$ se $m > 1$ cosa significa?

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \underset{x \neq x_0}{|x - x_0| < \delta} \ \underbrace{x \in \text{dom} f}_{\Omega} : \underbrace{|f(x)|}_{\text{Norma}} > \varepsilon$

(3) $f: \Omega \to \mathbb{R}$ $\lim_{x \to \infty} f(x) = L \in \mathbb{R}$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \forall x \in \text{dom} f \ |x| > \delta : |f(x) - L| < \varepsilon$

(4) $f: \Omega \to \mathbb{R}$ $\lim_{x \to \infty} f(x) = +\infty$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : x \in \text{dom} f \ |x| > \delta : f(x) > \varepsilon$

CONDIZIONE di CAUCHY

C.N.S. affinché x_n converge è che (per successioni)
$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \nu : \forall n, m > \nu \ |x_n - x_m| < \varepsilon$

C.N.S. affinché $\lim_{x \to x_0} f(x) = L \neq \infty$ (per funzioni)

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : |x - x_0| < \delta \ |y - x_0| < \delta \ x, y \neq x_0 : |f(x) - f(y)| < \varepsilon$

Considero un polinomio $p(x, y) = x$

$\lim_{x \to \infty} p(x, y)$

non diverge perché se mi sposto sull'asse y, non assume valori grandi, ma resta sempre zero!

la funzione oscilla

ANALISI II

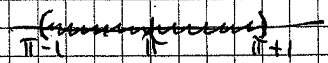
Consideremo tutte le funzioni $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

DEF. Dato $x_0 \in \mathbb{R}^n$ si definisce la sfera $B(x_0, \rho) = B_\rho(x_0)$ di centro x_0 e raggio ρ

Si definisce SFERA APERTA $= \{ x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| < \rho \} = B(x_0, \rho)$

SFERA CHIUSA $= \{ x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| \leq \rho \} = \overline{B}(x_0, \rho)$

Es. in $\mathbb{R}^1$ $B_1(\pi) = \{ x \in \mathbb{R}^1 : |x - \pi| < 1 \}$



L'intorno di centro x_0 e raggio ρ è $B(x_0, \rho)$ (Sfera aperta)

Supponiamo di avere $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$

Prendiamo un punto $x_0 \in \mathbb{R}^n$

Un punto x_0 si dice INTERNO ad Ω se:

DEF. $\exists \rho : B_\rho(x_0) \subseteq \Omega$ Questo non vuol dire necessariamente che $x_0 \in \Omega$

Es. se prendiamo l'insieme $[-1, 1]$ allora i punti interni appartengono a $]-1, 1[$

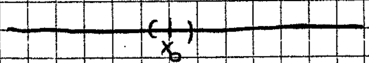
SE io ho $\bar{x} \in]-1, 1[$ allora scelgo $\rho = \min \{ |\bar{x} - 1|, |\bar{x} + 1| \}$

DEF. x_0 si dice ESTERNO ad Ω se è interno al complementare di Ω

DEF. Un punto x_0 si dice DI FRONTIERA se non è nè INTERNO, nè ESTERNO

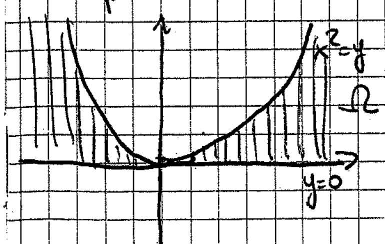
$\forall \rho > 0 : \Omega \cap B_\rho(x_0) \neq \emptyset \wedge \Omega^C \cap B_\rho(x_0) \neq \emptyset$

Esempio 1 Preso $\Omega \in \mathbb{R}^1 \wedge \Omega = \mathbb{Q}$



All'interno dell'intorno di x_0 ci sono sia razionali che irrazionali. Quindi non esistono nè punti interni nè esterni.

Esempio 2:



$\Omega = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < y < x^2 \}$

$y = 0 \notin \Omega$

Come possiamo scrivere i punti di Ω? Prendendo tipo la funzione $\frac{1}{2}x^2$

$\left(\frac{\varepsilon}{2}, \frac{\varepsilon^2}{8} \right)$ dobbiamo dimostrare che $B_\varepsilon(0) \Leftrightarrow \sqrt{\frac{\varepsilon^2}{4} + \frac{\varepsilon^4}{64}} < \varepsilon$

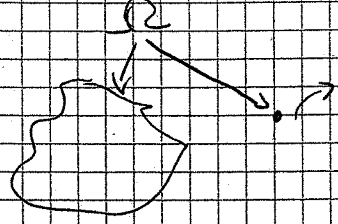
$\in B_\varepsilon(0)$

DEF. x_0 si dice ISOLATO per Ω se

1) $x_0 \in \Omega$

2) $\exists \bar{\rho} : B_{\bar{\rho}}(x_0) \cap \Omega = \{x_0\}$

ESEMPIO



Ovviamente questo è il punto isolato

DEF. x_0 si dice di ACCUMULAZIONE per Ω
o approssimabile da punti di Ω

se $\forall \rho > 0 \ \exists x \in \Omega : x \in B_\rho(x_0) - \{x_0\}$

Ogni intorno di x_0 contiene punti $x \in \Omega$ distinti da x_0

Definizioni: 1) Ω aperto se ogni suo punto è interno
($\forall x_0 \in \Omega \ \exists \rho > 0 : B_\rho(x_0) \subseteq \Omega$)

2) Ω si dice chiuso se Ω^c è aperto

alternative = 1- Ω è chiuso se contiene i propri punti di frontiera

2- Ω è chiuso $\Leftrightarrow$ contiene i propri punti di accumulazione

cioè $\mathcal{D}\Omega \subseteq \Omega$

Insieme dei punti di accumulazione

DEF. Ω si dice limitato se $\exists x_0 \in \mathbb{R}^n$ e $\rho \in \mathbb{R}^+ : \Omega \subseteq B_\rho(x_0)$

Ω si dirà CONVESSO se $\forall x_1, x_2 \in \Omega \quad (1-\lambda)x_1 + \lambda x_2 \in \Omega$
$\forall \lambda \in [0,1]$

Noi sappiamo che $|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots x_n^2}$

$|x| \geq \sqrt{x_i^2} = |x_i|$ Quindi la norma di un vettore è sempre maggiore del modulo delle componenti.

Immaginiamo che $\exists x_i : |x_i| > |x_j| \ \forall j$

Quindi $|x| \leq \sqrt{n x_i^2} = |x_i|\sqrt{n}$

Perciò sussiste la relazione $|x_i| \leq |x| \leq \sqrt{n}|x_j|$ con j max $1 \dots n$ $|x_i|$

$$\boxed{|x_i| \leq |x| \leq \sqrt{n} \max_{j=1\dots n} |x_j|}$$

LIMITE DI SUCCESSIONE

$\lim_n x_n = x \iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists \nu : \forall n > \nu \ \underbrace{|x_n - x|}_{\text{Norma in } \mathbb{R}^n} < \varepsilon$

$x_n \to x \iff \lim_{n \to \infty} x_n = x$

Questo accade se <u>SEF</u> $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \nu : \forall \nu > n \ |x_n - x| < \varepsilon$

Si potrebbe scrivere anche che

$\boxed{\lim_{n \to +\infty} |x_n - x| = 0}$ → Questa è una norma, quindi ricadiamo in una <u>successione di reali</u>.

$|x_n - x| = a_n : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$

Se non esiste la norma, possiamo scrivere $d(x, x_n)$

<u>ESEMPIO</u>

$x_n : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^2 \qquad x_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$

$x_n \in \mathbb{R}^N \Rightarrow x_n \equiv ((x_n)_1, (x_n)_2, \dots, (x_n)_N)$ → N successioni di numeri reali.

Se lemma inoltre ci dice $0 \leq \max_{i=1\dots N} |x_i| \leq |x| \leq \sqrt{N} \max_{j=1\dots N} |x_j|$

Se il vettore → 0, le componenti vanno a zero.

Se le componenti → 0, allora la successione → 0

Cioè SE $x_n \to 0 \ \mathbb{R}^n \iff (x_n)_j \to 0 \ \forall j = 1 \dots N$