DEFINIZIONI

SFERA APERTA $B_\varepsilon(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| < \varepsilon\}$

SFERA CHIUSA $\overline{B_\varepsilon}(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| \leq \varepsilon\}$

PUNTO INTERNO x_0 interno se $\exists \varepsilon : B_\varepsilon(x_0) \subseteq \Omega$

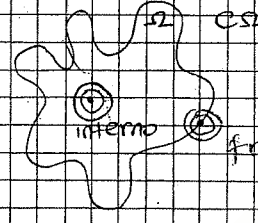
PUNTO ESTERNO x_0 esterno se è interno a $\complement\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : x \notin \Omega\}$

PUNTO DI FRONTIERA x_0 è di frontiera se non è né interno né esterno

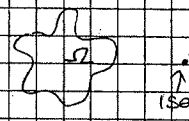
$\forall \varepsilon > 0 : \Omega \cap B_\varepsilon(x_0) \neq \emptyset$ e $\complement\Omega \cap B_\varepsilon(x_0) \neq \emptyset$

MASTER COPY

Tel. 388/9837745



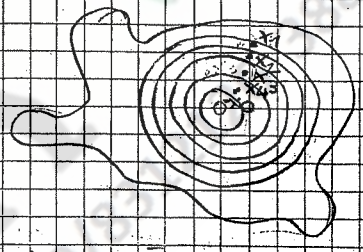
PUNTO ISOLATO x_0 è isolato se: ① $x_0 \in \Omega$ ② $\exists \varepsilon : \Omega \cap \overline{B_\varepsilon}(x_0) = \{x_0\}$



PUNTO DI ACCUMULAZIONE $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists x \in \Omega : x \in B_\varepsilon(x_0) - \{x_0\}$

$x_0 \in \partial\Omega$ (insieme dei pti di accumulazione)
$\exists x_n \in \Omega : x_n \neq x_m \ n \neq m$ e $x_n \to x_0$

Scelgo $\varepsilon_1 = 1$: $\exists x_1 \in B_{\varepsilon_1}(x_0) : x_1 \neq x_0$
Scelgo $\varepsilon_2 < |x_1|$ e $\varepsilon_2 = 1/2$: $\exists x_2 \in B_{\varepsilon_2}(x_0) : x_2 \neq x_0$
Dopo N passi scelgo $\varepsilon_N = \min\left(\frac{1}{n}, |x_{n-1}| - \frac{1}{2}\right)$: $|x_n - x_0| < \varepsilon_N$
(Trovo sempre un qualche elemento distinto da x_0 in tutte le sferette concentrate in x_0 con raggio piccolo a piacere)



INSIEME NON CHIUSO: non è né chiuso né aperto es $[-1, 1)$

INSIEME APERTO: ogni suo punto è interno $\forall x_0 \in \Omega \ \exists \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(x_0) \subseteq \Omega$

INSIEME CHIUSO: ① $\complement\Omega$ è aperto
② $\partial\Omega \subseteq \Omega$ (contiene i suoi punti di frontiera)
③ $\partial\Omega \subseteq \Omega$ (contiene i suoi punti accumulazione)

INSIEME LIMITATO: $\exists x_0 \in \mathbb{R}^n$ e $\varepsilon > 0 : \Omega \subseteq B_\varepsilon(x_0)$

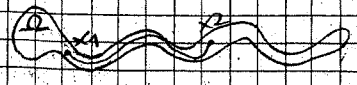
INSIEME CONVESSO: $\forall x_1, x_2 \in \Omega$ il segmento che li congiunge è interno all'insieme

$$\forall x_1, x_2 \in \Omega \quad (1-\lambda)x_1 + \lambda x_2 \in \Omega \quad \lambda \in [0,1]$$

CHIUSURA Dato Ω, si chiama chiusura ($\overline{\Omega}$) l'insieme $\overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$

INSIEME CONNESSO (per archi): Ω è connesso per archi se, comunque scelti due punti di Ω, esiste un arco che li congiunge.

$\forall x_1, x_2 \in \Omega \ \exists \gamma : [0,1] \to \Omega$ continua



INSIEME COMPATTO Ω compatto se è chiuso e limitato

CONO dato $X \subseteq \mathbb{R}^n$, X è un cono (rispetto all'origine 0) se $x \in X \Rightarrow tx \in X$, $t > 0$

FUNZIONE α-OMOGENEA $f: X \to \mathbb{R}$, X cono è α-omogenea $\alpha \in \mathbb{R}$ se $f(tx) = t^\alpha f(x)$ $\forall x \in X$ $t > 0$

DERIVATA PARZIALE Derivata della funzione rispetto a una delle variabili

MINIMO ASSOLUTO x_0 min. assoluto in Ω se $f(x_0) \leq f(x)$, $\forall x \in \Omega$

MINIMO RELATIVO se $\exists B_\varepsilon(x_0)$: $f(x_0) \leq f(x)$ $\forall x \in B_\varepsilon(x_0) \cap \Omega$

DIFFERENZIALE (somme delle derivate parziali x i rispettivi incrementi) si chiama differenziale l'applicazione $A(w)$: $f: \Omega \to \mathbb{R}$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, x_0 pt interno a Ω: $\lim_{w \to 0} \frac{|f(x_0+w) - f(x_0) - A(w)|}{\|w\|} = 0$

DERIVATA DIREZIONALE si chiama derivata direzionale (di f in direz. di v) il limite: $\lim_{t \to 0} \frac{f(x_0+tv) - f(x_0)}{t}$

GRADIENTE Si dice gradiente di f nel pt (x_0, y_0) ($\nabla f(x_0, y_0)$) il vettore che ha come componenti le derivate parziali di f nel pt (x_0, y_0). (se queste esistono)

MATRICE JACOBIANA Matrice i cui elementi sono le derivate parziali prime di una funzione che ha dominio e codominio in uno spazio euclideo

CURVA DI LIVELLO Data f una curva di livello $\gamma(t)$ è la curva che taglia la funzione sempre alla stessa altezza: $f(\gamma(t)) = k$

MATRICE HESSIANA Matrice quadrata che ha come elementi le derivate parziali seconde di f in x_0 ovvero la matrice in cui la i-esima riga è il gradiente della derivata parziale di f rispetto alla i-esima variabile

CAMPO Dato $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ si definisce campo di classe C^k una funzione $A: \Omega \to \mathbb{R}^n$ le cui componenti scalari sono funzioni da Ω in $\mathbb{R}$ continue con derivate fino all'ordine k

FORMA Dato $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ si definisce forma (differenziale lineare) una funzione $\alpha: \Omega \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tale che, per ogni $\bar{x} \in \Omega$, la funzione $t \to \alpha(\bar{x}, t)$ sia lineare in t

CAMPO POTENZIALE Campo di vettori $A: \Omega \to \mathbb{R}^n$ si dice integrabile (campo potenziale) se $\exists f: \Omega \to \mathbb{R}$: $\nabla f(x) = A(x)$, $\forall x \in \Omega$

POTENZIALE (CAMPO) Ogni funzione f che verifica $\nabla f(x) = A(x)$, $\forall x \in \Omega$ si dice primitiva (potenziale) del campo A

FORMA ESATTA Una forma $\alpha: \Omega \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ si dice integrabile (o esatta) se $\exists f: \Omega \to \mathbb{R}$ tale che $df = \alpha$ su $\Omega \times \mathbb{R}^n$

POTENZIALE (FORMA) Ogni funzione $f: \Omega \to \mathbb{R}$ che verifica $df = \alpha$ su $\Omega \times \mathbb{R}^n$ verrà detta primitiva (potenziale) della forma α

CONGIUNZIONE Data $\gamma_1: [a,b] \to \Omega$ e $\gamma_2: [b,c] \to \Omega$ si definisce la congiunzione $\gamma_1 \oplus \gamma_2$ la curva: $\gamma_1 \oplus \gamma_2 = \begin{cases} \gamma_1(t) & t \in [a,b] \\ \gamma_2(t) & t \in [b,c] \end{cases}$

CURVA OPPOSTA Da $\gamma: [a,b] \to \Omega$, si definisce la curva opposta $\ominus\gamma$: $\ominus\gamma: [a,b] \to \Omega$ e $\ominus\gamma = \gamma(b-t+a)$

CAMPO IRROTAZIONALE Un campo A di classe C^1 è detto irrotazionale se $(A_j)_{x_i} = (A_i)_{x_j}$ $\forall i \neq j$

FORMA CHIUSA La forma $\alpha(x,w) = A(x) \cdot w$ è detta chiusa se per il suo campo associato vale $(A_j)_{x_i} = (A_i)_{x_j}$ $\forall i \neq j$.

OMOTOPIA Date due curve $\gamma: [0,1] \to \Omega$ e $\sigma: [0,1] \to \Omega$ si dicono omotope (deformabili) in Ω se
$\exists h: [0,1] \times [0,1] \to \Omega$ continua:
$h(0,t) = \gamma(t)$ e $h(1,t) = \sigma(t)$

INSIEME SEMPLICEMENTE CONNESSO Un insieme $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ si dice semplicemente connesso se ogni curva chiusa $\gamma: [0,1] \to \Omega$ è omotopa in Ω a una curva costante $\sigma(t)$, $t \in [0,1]$

INSIEME STELLA $\Omega \subset \mathbb{R}$ si dice stella se $\exists x_0 \in \Omega$ (polo) tale che il segmento $\overline{x_0 x} \subseteq \Omega$, $\forall x \in \Omega$

INSIEME SCONNESSO Se Ω non è connesso si dice sconnesso

COMPONENTE CONNESSA CONTENENTE x_0 Dato $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ e $x_0 \in \Omega$ si definisce componente connessa contenente x_0 come
$\Omega(x_0) = \{x \in \Omega : \exists \gamma: [0,1] \to \Omega : \gamma(0) = x_0 \text{ e } \gamma(1) = x\}$.

ROTORE Dato $A: \Omega \to \mathbb{R}^3$ $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ si definisce
$\text{rot} A = (\,[(A_2)_{x_3} - (A_3)_{x_2}], -[(A_1)_{x_3} - (A_3)_{x_1}], [(A_1)_{x_2} - (A_2)_{x_1}]\,)$

CURVA RETTIFICABILE Curva che può essere trasformata in una somma di segmenti così da poterne calcolare la lunghezza

LUNGHEZZA La lunghezza approssimativa della curva nell'intervallo $T = [a,b]$ è data da: $\Lambda(T) = \sum_{i=1}^{n} |\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})|$ e quella reale
da $\Lambda(\gamma) = \sup \Lambda(T)$

CURVA REGOLARE $\gamma: [a,b] \to \mathbb{R}^n$, $\gamma \in C^1$ si dice regolare se $|\dot\gamma(t)| \neq 0$ $\forall t \in [a,b]$

ASCLISSA CURVILINEA Data $\gamma: [a,b] \to \mathbb{R}^n$ rettificabile, $s_0 \in [a,b]$ origine e scelto un verso di percorrenza della curva, posso associare la lunghezza dell'arco $\gamma_{s_0}^{s}$

INTEGRALE CURVILINEO Integrale di una forma differenziale $f: \Omega \to \mathbb{R}$ su una curva $\gamma \in C^1: [a,b] \to \Omega$ in $[a,b]$:
$\int_\gamma f(\sigma)\, ds = \int_a^b f(\gamma(t))\, |\dot\gamma(t)|\, dt$

CURVA EQUIVALENTE $\gamma: [a,b] \to \mathbb{R}^n$ e $\sigma: [c,d] \to \mathbb{R}^n$ sono equivalenti se
$\exists \varphi: [a,b] \to [c,d]$ continua e invertibile (strett. monot.)
$\gamma(t) = \sigma(\varphi(t))$

INTERVALLO $I = \{(x_1 \dots x_n) : x_i \in [a_i, b_i]\ \forall i\}$

PLURINTERVALLO Insieme finito di intervalli senza punti interni comuni

MISURA INTERNA Se Ω è un insieme aperto la sua misura è $|\Omega| = \sup |\Pi|$
$\Pi \subset \Omega$ plurintervallo

MISURA ESTERNA Se K è un insieme compatto $\exists I: K \subseteq I$ e la sua misura è $|K| = \inf |I|$

INSIEME MISURABILE Un insieme è misurabile se la misura interna e quella esterna coincidono

INTEGRABILITÀ (SECONDO LEBESGUE) f si dice integrabile (secondo Lebesgue) se $\int_E f = \int_E^{+} f - \int_E^{-} f$

PARTE POSITIVA $f^+(x) = \max(f(x), 0)$

PARTE NEGATIVA $f^-(x) = \max(0, -f(x))$

MASTER COPY
Tel. 388/9837745

STIMA DELLA NORMA CON I MODULI DELLE COMPONENTI

x_j componente $\quad |\bar{x}| \geq |x_j|, \ \forall j: 1 \dots n \rightarrow |\bar{x}_i|$ è max

$|x_j| \leq \|x\| = \sqrt{\sum x_j^2} \leq \sqrt{\sum \bar{x}_i^2} = \sqrt{n \bar{x}_i^2} = \sqrt{n} \cdot |\bar{x}_i| = \sqrt{n} \max |x_j|$

un elemento è minore di una somma di termini positivi

$$\max |x_j| \leq \|x\| \leq \sqrt{n} \max |x_j|$$

CONVERGENZA E DIVERGENZA DI SUCCESSIONI

$\lim x_n = x$ (norma)

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \bar{n}: \forall n > \bar{n} \quad |x_n - x| < \varepsilon \qquad [x_n - x : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^+]$

$x_n \ \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^2$ è del tipo $x_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$

Lemma
- Se un vettore converge, convergono tutte le sue componenti

$$x_n \rightarrow 0 \iff (x_n)_i \rightarrow 0 \quad \forall i = 1 \dots n$$

$\lim x_n = \infty$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \bar{n}: \forall n > \bar{n} \quad |x_n| > \varepsilon$

Lemma
- Se un vettore diverge, almeno una delle sue componenti diverge

Se un vettore non diverge e non converge, è oscillante

CONTINUITÁ

$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ è continua in x_0 se:

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0: \ |x - x_0|_{\mathbb{R}^n} < \delta \ \ x, x_0 \in \text{dom} f \rightarrow |f(x) - f(x_0)|_{\mathbb{R}^m} < \varepsilon$

Conseguenze: $\rightarrow f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m, \ \Omega \subseteq \mathbb{R}^n, \ \Omega = \text{dom} f$

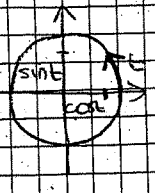
$\forall x \in \Omega \quad f(x) \in \mathbb{R}^m \quad f(x) = (f_1(x), f_2(x) \dots f_n(x))$

$\rightarrow \gamma: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ continua in ogni pt del dominio

$\gamma(t) = \begin{pmatrix} \alpha(t) \\ \beta(t) \end{pmatrix} \quad \alpha, \beta: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}^2$

CASO ①: CURVE

$\gamma(t) = \begin{cases} \cos t \\ \sin t \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi]$ path di una circonf unitaria possono essere identificati con il coseno e seno



$$\gamma(t) = x_0 + tv = \begin{pmatrix} \alpha(t) \\ \beta(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha + tx \\ \beta + ty \end{pmatrix}$$

CASO ②: SUPERFICIE PARAMETRICA

$$\Phi(\varphi,\lambda)=\begin{pmatrix} x(\varphi,\lambda)\\ y(\varphi,\lambda)\\ z(\varphi,\lambda)\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}A_1\\A_2\\A_3\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}B_1\\B_2\\B_3\end{pmatrix}$$

LIMITI DI FUNZIONE CONVERGENTI

$\lim_{x\to x_0} f(x)=L\in\mathbb{R}$ $\quad f:\Omega\to\mathbb{R}$ (o anche $\mathbb{R}^n$)
$x_0\in\partial\Omega,\ x\in\mathrm{dom} f$

$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0:\ |x-x_0|<\delta,\ x\neq x_0 \Rightarrow |f(x)-L|<\varepsilon$

Th
- Il limite della somma è la somma dei limiti

$\lim_{x\to x_0} f(x)=L$
$\lim_{x\to x_0} g(x)=M$
$\Rightarrow \lim_{x\to x_0}[f(x)+g(x)]=[L+M]$ $\quad f,g:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$

$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta_1>0:\ |x-x_0|<\delta_1,\ x\in\mathrm{dom} f,\ x\neq x_0 \Rightarrow |f(x)-L|<\varepsilon$

$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta_2>0:\ |x-x_0|<\delta_2,\ x\in\mathrm{dom} g,\ x\neq x_0 \Rightarrow |g(x)-M|<\varepsilon$

$\forall\varepsilon>0 \quad |f(x)+g(x)-L-M|=|f(x)-L|+g(x)-M|\leq |f(x)-L|+|g(x)-M|$
(disug. triang.)

Vale per $\forall\varepsilon>0$, quindi in particolare anche per $\varepsilon/2$

$|f(x)-L|<\varepsilon/2 \qquad |g(x)-M|<\varepsilon/2$

MASTER COPY
Tel. 388/9837745

Th permanenza del segno
- Se f continua in x_0 e $f:\Omega\to\mathbb{R}$, $\Omega\subseteq\mathbb{R}^n$, $f(x_0)>0$

Allora
$\exists\varepsilon>0:\ f(x)>0,\ \forall x\in B_\varepsilon(x_0)$

f continua: $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0:\ |x-x_0|<\delta,\ x,x_0\in\mathrm{dom} f \Rightarrow |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$
scelgo $\bar\varepsilon<f(x_0)$, $\exists\bar\delta:\ |x-x_0|<\bar\delta \quad 0<f(x_0)-\varepsilon<f(x_0)<f(x_0)+\varepsilon$

CAMBIO DI VARIABILE

$\lim_{x\to 0} f(x)=L \qquad \lim_{y\to 0} g(y)=M \overset{?}{\Rightarrow} g(f(x))=M$

Per poter fare $y=f(x)$ (cambio di variabile) sono necessarie delle condiz.
- $f(x)\in\mathrm{dom} g$
- $|f(x)-L|<\varepsilon_6$
- $f(x)\neq L$

} in assenza di tali condizioni, la sostituzione porta un risultato FALSO!

Th ①
- Se $f:\Omega\to\Sigma$, $\lim_{x\to x_0} f(x)=L$ $\quad g:\Sigma\to\Theta$ continua in L

Allora $\lim_{x\to x_0} g(f(x))=g(L)$ $\quad y=f(x)$

g continua $\forall\varepsilon>0\ \exists\varepsilon_6>0:\ |y-L|<\varepsilon_6,\ y\in\mathrm{dom} g \Rightarrow |g(y)-g(L)|<\varepsilon$
La continuità permette di escludere il caso $y=L$ eliminando il problema alla radice.