Meccanica dei solidi

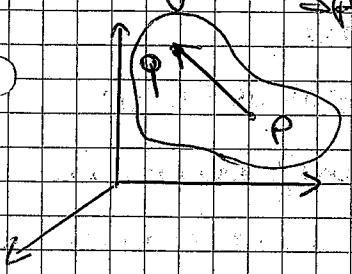
Solido è definito come la regione dello spazio euclideo che il solido occupa
⇒ è un sottoinsieme dello spazio euclideo

$\mathbb{R}^3$ = spazio euclideo che è l'insieme dei punti e dei vettori

NB Il fisico usa punto = vettore

⇒ $\mathcal{E}$ = spazio euclideo immaginato come insieme di traslazioni

V = spazio di $\mathbb{R}^3$ con vettori liberi



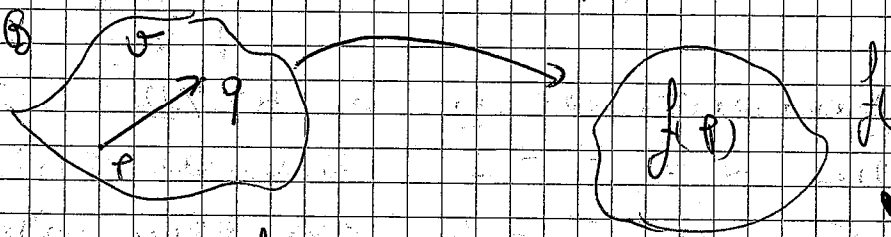
$q = p + v \Rightarrow v = q - p$

quindi la differenza tra due punti è un vettore

$B \subset \mathcal{E} \rightarrow$ B = sottoinsieme dello spazio euclideo è la chiusura di un aperto di $\mathbb{R}^3$

I punti di B sono punti materiali

Deformazione è la funzione che manda il corpo nella sua immagine



$\Rightarrow f : B \longrightarrow \mathcal{E}$

f deve essere continua quindi da punti contigui posso avere una deformazione a punti lontani non NON è accettata la frattura. Il corpo deve rimanere integro

f è iniettiva $\Rightarrow$ f è invertibile

$\Rightarrow$ se $p \neq q \Rightarrow f(p) \neq f(q)$

f è differenziabile $\underline{f} \begin{cases} f_1(x,y,z) \\ f_2(x,y,z) \\ f_3(x,y,z) \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial z} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x} & \frac{\partial f_3}{\partial y} & \frac{\partial f_3}{\partial z} \end{bmatrix} = F$

matrice Jacobiana

gradiente di deformazione

f è di classe C^1 = continua, f^{-1} è di classe C^1 = continua $\Rightarrow$ è un DIFFEOMORFISMO

ci dice che è una successione di deformazioni continue $\Rightarrow$ il det è una funzione continua e non si deve mai annullare

$\Rightarrow$ f è diffeomorfismo $F = \nabla f$ è positivo

f ha $\det(F) > 0 \Rightarrow$ ci dice che la deformazione non cambia mai verso

spostamento: dato un vettore $\underline{u}(p) = f(p) - p$ è lo spostamento con la che ha 3 componenti $\underline{u} \begin{cases} u \\ v \\ w \end{cases}$

H è il gradiente di $\underline{u}$ e $H = \nabla \underline{u} = F - I$

vale che $H = F - I$ quindi ogni derivata di H è $= a$ $F - 1$ per ogni valore

$H = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix}$ con $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial f_1}{\partial x} - 1$ ...

...

master COPY

master COPY

per la deformazione si considera la differenziabilità di F e di $\underline{u}$

H dipende da q (punto) $\Rightarrow$ quindi per ogni volta che fisso un punto guardo come succede al contorno tramite H

si definisce $E = \frac{H + H^T}{2}$ = è un tensore simmetrico

$W = \frac{H - H^T}{2}$ = è un tensore antisimmetrico

Sym = lo spazio dei tensori simmetrici
lo dim = 6

Skw = lo spazio dei tensori antisimmetrici
lo dim = 3

$Lin = Sym \oplus Skw$ $\quad E \cdot W = 0$

12/03/2020 (Teoria Continuum)

$\underline{u} = f(p) - p$ campo di spostamento : a ciascun punto corrisponde uno spostamento

$\underline{u}$ è il vettore spostamento e vale che $\nabla \underline{u} = F - I$

$H = \Delta \underline{u}$ = gradiente di spostamento

$E = \frac{H + H^T}{2}$ $\quad W = \frac{H - H^T}{2}$ $\Rightarrow$ piccole deformazioni

- Nelle nostre ipotesi supponi $|H| \ll 1$ $\quad |H|$ = è la somma estesa di tutte le componenti $\Rightarrow |H| = \sqrt{\cdot^2 + \cdot^2}$
- La somma di tutte le sue componenti è adimensionale

$\underline{u}$ è differenziabile

- $\underline{u}(p) = \underline{u}(q) + H(q)(p-q) + o(|p-q|)$

lo spostamento di p è = allo spostamento di q + il gradiente di spostamento di q per la differenza $|p-q|$ + un resto detto $o(|p-q|)$

$o(|p-q|)$ è l'errore che commetto e tale che

per $p \to 0$ anche $q \to 0$

se $E \neq 0$ si ha che

$\underline{u}(p) = \underline{u}(q) + W(p-q) + o(|p-q|)$ e

$\underline{u}(p) = \underline{u}(q) + \underline{w} \times (p-q)$

tensore è un'applicazione lineare che va da $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. Dato un sistema di riferimento W ho un certo tensore ma se cambio il sistema il tensore cambierà le componenti $\Rightarrow$ ho modulo rimane lo stesso

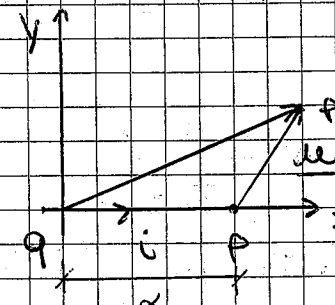
$\underline{w}$ è un vettore assiale corrispondente a W

$$\underline{w} = (w_x, w_y, w_z)$$

$$W = \begin{bmatrix} 0 & -w_z & w_y \\ w_z & 0 & -w_x \\ -w_y & w_x & 0 \end{bmatrix}$$



Supponi di avere un sistema di riferimento all'interno del corpo. Prendo una fibra di lunghezza α e mi chiedo la deformazione



$$p - q = \alpha \underline{t}$$

$$\underline{u}(p) = \underline{u}(q) + H(q)(p-q) + o(|p-q|)$$

$$\left[\underline{u}(p) = \underline{u}(q) + H(q)(\alpha \underline{t}) + o(\alpha)\right]$$

$$\underline{u}(p) = \alpha H \underline{t} + o(\alpha)$$

$\Delta \ell$ = proiezione della lunghezza pp' p'

$$\Delta \ell = \underline{u}(p) \cdot \underline{i} = \alpha \underline{i} \cdot H \underline{t} + o(\alpha) =$$

$$= \alpha \underline{i} \cdot E \underline{i} + \alpha \underline{i} \cdot W \underline{i} + o(\alpha) =$$

$\Rightarrow$ $= 0$ perché sto moltiplicando $\underline{i} W \underline{i} = 0$ dato che W sulla sua diagonale ho tutti 0

$$= \alpha \underline{i} \cdot E \underline{i} + o(\alpha)$$

In questo caso la tensione dipende che q è fissa se la deformazione di q basta creare una traslazione rigida del suo sistema di riferimento che mi riporta q in O

per $\Delta\underline{e} = \alpha \underline{i} \cdot \underline{\underline{E}} \underline{i} + \theta(\alpha)$

quindi $\lim_{\alpha \to 0} \frac{\Delta \underline{e}}{\underline{e}} = \underline{\hat{e}} \cdot \underline{\underline{E}} \underline{i} = E_{11} = \varepsilon_x$

La componente $E_{11} = \varepsilon_x$ è la tensione della deformazione assiale = è l'allungamento % di una fibra che è distesa lungo l'asse x nella sulla deformazione

$E_{22} = E_y$ = è l'allungamento % di una fibra che in origine è distesa lungo y

$E_{33} = E_z$ = è l'allungamento % di una fibra che in origine è distesa lungo l'asse z

Vale che $E_{ij} = E_{ji}$ con $i \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $j \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ perché
$\underline{\underline{E}}$ è sym $\Rightarrow \underline{\underline{E}}$ è la parte sym di H

$\underline{\underline{E}}$ = sono gli allungamenti percentuali delle fibre rispetto all'asse x, y, z

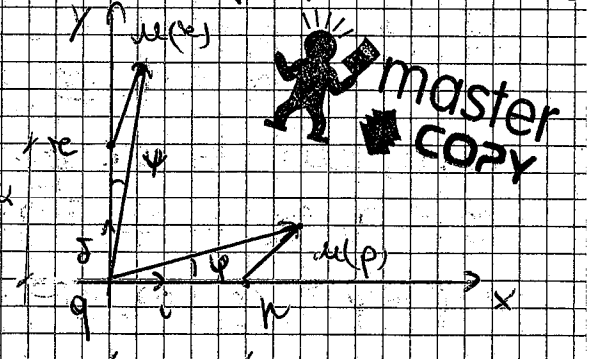
L'operatore lo ricavo per due ipotesi
se vale che $\underline{u}(p) = \underline{u}(q) + H(q)(p-q) + \theta(\|p-q\|)$

$\Rightarrow \underline{u}(p) = \alpha H \underline{i} + \theta(\alpha)$

$\underline{u}(x) = \alpha H \underline{\delta} + \theta(\alpha)$

considero una fibra α in origine disposta $\perp$ una su x e l'altra su y

con φ e ψ positivi



$\varphi = \lim_{\alpha \to 0} \frac{\underline{u}(p)\underline{\delta}}{\alpha} = \underline{\delta} H \underline{i} = H_{21}$

$\psi = \lim_{\alpha \to 0} \frac{\underline{u}(x)\underline{i}}{\alpha} = \underline{i} H \underline{\delta} = H_{12}$

Per una rotazione rigida ho che φ e ψ cambiano simbolicamente ma $\varphi + \psi$ rimane costante