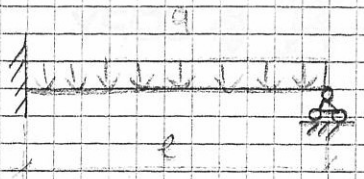
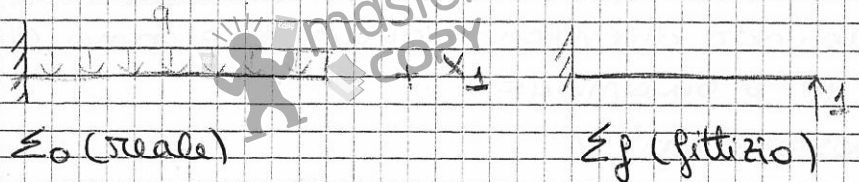
Calcolo di sistemi di travi → STRUTTURE IPERSTATICHE

Metodo di risoluzione



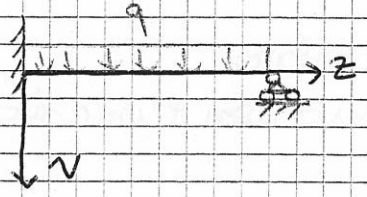
⇒ 2 metodi: • METODO DELLE FORZE
• METODO DEGLI SPOSTAMENTI

Metodo delle forze



eq. di congruenza ⇒ $v = v_0 + X_1 v_1 = 0$ (=0 perché il carrello impedisce lo spostamento)

Metodo degli spostamenti



Il problema si può risolvere tramite delle equazioni di congruenza. Si ipotizzano piccole deformazioni.

① eq. geometrica: $\kappa = -v''$
dove κ = curvatura flessionale della trave e v'' = derivata seconda dello spostamento trasversale dall'asse risp. a z
dg + orizzontale

② eq. equilibrio: $M'' = -q$ (perché la derivata seconda del momento è il taglio con segno negativo)

③ dalla teoria della flessione della trave: $M = EJ\kappa$
quest'equazione è valida solo secondo la TEORIA ELASTICA LINEARE

$\kappa = -v'' \Rightarrow M = -EJv''$

Derivo il momento due volte: $M'' = -EJv^{IV}$

Da ② ⇒ $M'' = -q \Rightarrow +q = +EJv^{IV}$ EQUAZIONE DIFFERENZIALE DELLA LINEA ELASTICA

Per ricavare v''', v'', v', v mi basta integrare:

$$EJv''' = qz + c_1$$

$$EJv'' = q\frac{z^2}{2} + c_1 z + c_2$$

$$EJv' = q\frac{z^3}{6} + c_1\frac{z^2}{2} + c_2 z + c_3$$

$$EJv = \frac{qz^4}{24} + c_1\frac{z^3}{6} + c_2\frac{z^2}{2} + c_3 z + c_4$$

c_1, c_2, c_3, c_4 sono costanti dipendenti dalle CONDIZIONI AL CONTORNO che a loro volta dipendono dai vincoli e sono di due tipi: CINEMATICHE e DINAMICHE.

CINEMATICHE (spostamenti impediti dal vincolo) → spostamento v
→ rotazione v'

DINAMICHE (STATICHE) (reazioni che può fornire il vincolo) → momento $v'' = -\frac{M}{EJ}$
→ taglio $v''' = -\frac{T}{EJ}$ (il taglio è la derivata del momento)

Calcoliamo c_1, c_2, c_3, c_4 in questo caso particolare.
Dato che i vincoli sono 2, due costanti le troverò con l'incastro e le altre due con il carrello.

INCASTRO → reazioni: momento + trasl. y + trasl. x
spostamento e rotazione nulli
$v = 0$, $v' = 0$ $(M, T \neq 0)$

$v = 0 \Rightarrow c_4 = 0$

$v' = 0 \Rightarrow c_3 = 0$

CARRELLO → reazioni: trasl. y ⇒ spostamento nullo
$v = 0$, $M = 0$

$v(\ell) = 0$

se $M = 0 \Rightarrow v''(\ell) = 0$

$$\begin{cases} v(\ell)EJ = \frac{q\ell^4}{24} + c_1\frac{\ell^3}{6} + c_2\frac{\ell^2}{2} = 0 \\ v''(\ell)EJ = \frac{q\ell^2}{2} + c_1\ell + c_2 = 0 \end{cases}$$

è un sistema di due equazioni in due incognite, c_1 e c_2

Ricavo c_1 e c_2:

$$c_2 = -\frac{qe^2}{2} - c_1 e$$

$$\frac{qe^4}{24} + c_1\frac{e^3}{6} + \left(-\frac{qe^2}{2} - c_1 e\right)\frac{e^2}{2} = 0$$

$$\frac{qe^4}{24} + c_1\frac{e^3}{6} - \frac{qe^4}{4} - c_1\frac{e^3}{2} = 0$$

$$c_1\left(\frac{e^3}{6} - \frac{e^3}{2}\right) = qe^4\left(\frac{1}{24} + \frac{1}{4}\right)$$

$$-\frac{c_1}{3}e^3 = qe^4\frac{5}{24} \Rightarrow c_1 = -qe\frac{5}{8}$$

$$c_2 = -\frac{qe^2}{2} - \left(-qe\frac{5}{8}\cdot e\right) = qe^2\left(\frac{1}{8}\right) = \frac{1}{8}qe^2$$

Trovate le costanti, posso ora calcolare taglio e momento:

$$M = -EJv'' = -q\frac{z^2}{2} - c_1 z - c_2 = -q\frac{z^2}{2} + qe\frac{5}{8}z - \frac{1}{8}qe^2$$

$$T = -EJv''' = -qz - c_1 = -qz + qe\frac{5}{8} \Rightarrow \text{taglio lineare}$$

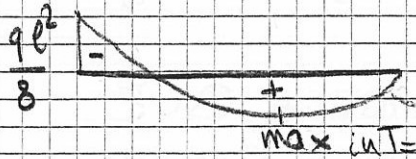
DIAGRAMMI DELLE CARATTERISTICHE:

momento

$$M(z=0) = -\frac{1}{8}qe^2$$

$$M(z=e) = -\frac{qe^2}{2} + \frac{5}{8}qe^2 - \frac{1}{8}qe^2 = 0$$

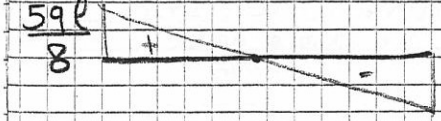
infatti in $z=e$ non c'è nessun vincolo alla rotazione



taglio

$$T(z=0) = \frac{5}{8}qe \quad \text{(reaz. incastro)}$$

$$T(z=e) = -qe + \frac{5}{8}qe = -\frac{3}{8}qe \quad \text{(reaz. cerniera)}$$



NOTA BENE:

T=0 con un carrello o un vincolo lungo y

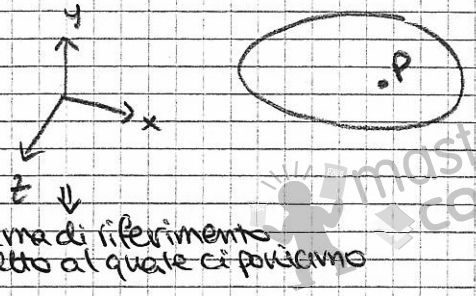
Il limite di questo metodo è che se ci fosse un appoggio nel mezzo della trave, il taglio sarebbe discontinuo e non si potrebbero usare né le derivate, né quantità infinitesime

Meccanica dei solidi = studio di deformazioni infinitesime

Si studia la cinematica della deformazione del solido. Il corpo occupa una regione dello spazio euclideo ($\mathcal{E}$) nello spazio $\mathbb{R}^3$.

$\mathcal{E}$ = insieme dei punti dello spazio euclideo

OSSERVATORE:



⇒ insieme che contiene punti, in questo caso P

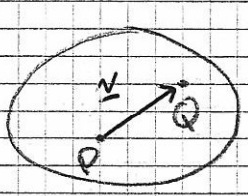
sistema di riferimento rispetto al quale ci poniamo

master COPY

Posso anche definire uno spazio di vettori tridimensionali (V), uno spazio vettoriale che descrive le traslazioni.

(Def. spazio vettoriale: insieme in cui sono definite le operazioni di somma e prodotto)

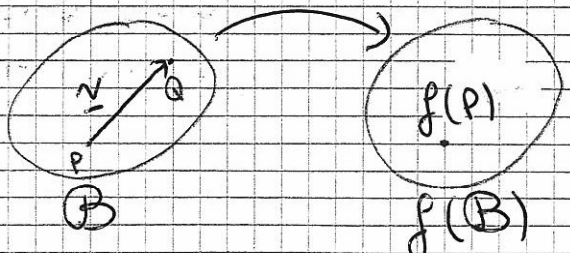
VETTORE SPOSTAMENTO = TRASLAZIONE di un punto P in Q



$v = q - p$ (vettore = differenza tra due punti)

Il processo deformativo si può descrivere con una funzione f:

$f: \mathcal{B} \to \mathcal{E}$ (applicazione lineare)



$\mathcal{B}$ = insieme di punti, $\mathcal{B} \subset \mathcal{E}$

è sottoinsieme di $\mathcal{E}$, connesso, è la CHIUSURA DI UN APERTO CONNESSO

$\partial\mathcal{B}$ = frontiera di $\mathcal{B}$ che descrive spostamenti e carichi
↳ n versore della frontiera

DEFORMAZIONE: manda P nella sua immagine

Studieremo le proprietà con cui si deforma un corpo.

$\mathcal{B}$ = CONFIGURAZIONE del corpo

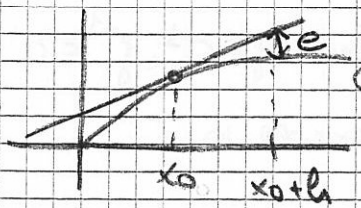
△ Il punto $\in \mathcal{B}$ (dominio), mentre gli oggetti che lo individuano $\in$ allo spazio V dei vettori ordinari (in $\mathbb{R}^3$)

Proprietà di f (funzione che descrive la deformazione):

f deve essere:

- CONTINUA (non si ammettono corpi che si fratturano durante la deformazione)
- INIETTIVA → $P \neq Q \Rightarrow f(P) \neq f(Q)$ cioè in una funzione iniettiva due vettori sono uguali solo se hanno la stessa immagine. Se f è INIETTIVA ⇒ è INVERTIBILE (OMEOMORFISMO)
- DIFFERENZIABILE (∈ classe C^1)

Def. DERIVABILITÀ (differenziabilità in 1 variabile)



e = errore

$$f(x_0+h) = f(x_0) + \frac{df}{dx}(x_0)\,h + o(h)$$

$\lim_{h\to 0} \frac{o(h)}{h} = 0$ e deve tendere a 0 più velocemente

DERIVABILITÀ = prop. necessaria x DIFFERENZIABILITÀ

Def. DIFFERENZIABILITÀ

$$f(x_0+h, y_0+k) = f(x_0,y_0) + L\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} + o\left(\sqrt{h^2+k^2}\right)$$

$$\Updownarrow$$

$$\underline{u}(P) = \underline{u}(Q) + H(Q)(P-Q) + o(|P-Q|)$$

$\lim_{|P-Q|\to 0} \frac{o(P-Q)}{|P-Q|} = 0$ proprietà di differenziabilità

$$L\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} = \vec{L}(x_0)\vec{h} = \vec{v}\cdot\vec{h} = H(Q)(P-Q)$$

△ u e f sono legate da un'identità

Il vettore $\vec{v}$ si chiama gradiente di $\vec{F}$ in x_0 ($\vec{v} = \nabla\vec{F}(x_0)$).
Nella nuova scrittura $\vec{v} = H(Q)$, quindi $H(Q)$ è il gradiente di $\underline{u}$, vettore della deformazione. $H(Q)$ è la deformazione in un intorno del punto Q, è una deformazione locale.

H = gradiente di $\underline{u}$ = GRADIENTE DI SPOSTAMENTO

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix}$$

$\underline{u} = (u, v, w)$ componenti di $\underline{u}$

$H \ll 1$ → def. piccole