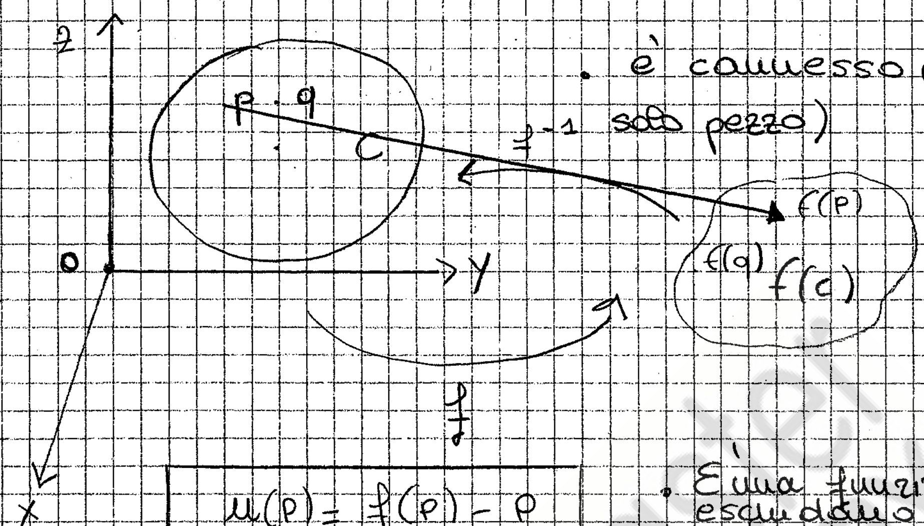
MECCANICA DEI SOLIDI

27/2/12

(1) DEFORMAZIONI — TEORIA DELLA DEFORMAZIONE

CORPO MATERIALE

. È un sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$



. è connesso (fatto di un solo pezzo)

$f(x, y, z)$

f_1

f_2

f_3

$$\boxed{u(P) = f(P) - P}$$

. È una funzione continua; si escludono fenomeni di frattura; ed è iniettiva.

Deformazione del Corpo

È una funzione o Applicazione da un sottoinsieme in $\mathbb{R}^3$ in $\mathbb{R}^3$.

La f deve essere di classe C^1 (che abbia tutte le derivate prime parziali e siano continue) perciò differenziabile

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial z} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x} & \frac{\partial f_3}{\partial y} & \frac{\partial f_3}{\partial z} \end{bmatrix} = F \text{ Gradiente di deformazione}$$

→ Matrice 3x3, con tutte le derivate parziali prime.

$F = \nabla f$

$\det F \neq 0$

$$\boxed{\det F > 0}$$

L'Identità ha det = 1

Concetto di Spostamento: È un vettore o meglio un campo di vettori

$$P \longrightarrow \underline{u}(P) \begin{cases} u \\ v \\ w \end{cases}$$

spostamento x ogni punto

derivate parziali

$$\nabla u = H = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix}$$

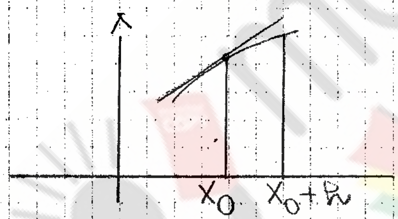
Gradiente di spostamento

$$H = F - I \qquad F = H + I$$

Le proprietà della deformazione vengono fuori da H o F.

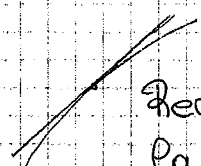
Le Componenti di H, non hanno dimensioni

$$\frac{\text{spostamento}}{\text{spostamento}}$$

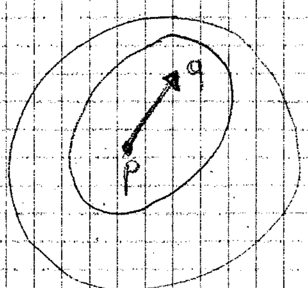


$$f(x_0 + h) - f(x_0) = \underbrace{f'(x_0)\,h + o(h)}$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{o(h)}{h} = 0$$



Retta Tg: quella che approssima di più la curva.



$$\underline{u}(q) = \underline{u}(p) + H(p)(q - p) + o(|p - q|)$$

$$\lim_{q \to p} \frac{o(|p - q|)}{(p - q)} = 0$$

Parte Simmetrica della H

$$E = \frac{1}{2}\left(H + H^T \right)$$

Parte asimmetrica

$$W = \frac{1}{2}\left(H - H^T \right)$$

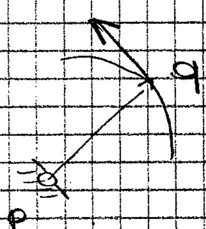
$$\boxed{H = W + E}$$

dato W, $\underline{\omega}$

$$W\underline{a} = \underline{\omega} \wedge \underline{a} \quad , \forall a \in V$$

SPOSTAMENTO RIGIDO INFINITESIMO

$$\underline{u}(q) = \underline{w}(p) + \underline{\omega} \wedge (q - p)$$



$$\underline{u}(q) = \underbrace{\cancel{\underline{w}(p)}}_{\substack{\text{xche' c'e'} \\ \text{la cerniera}}} + \underline{\omega} \wedge (q - p)$$

$$\underline{u}(q) = \omega (q - p)$$

28/2/2012

$\underline{u} : C \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$\boxed{\underline{u}(p) = \underline{f}(p) - \underline{p}}$$

$$\boxed{H << 1}$$ **NB.**

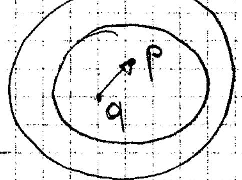
$\underline{u} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$ componenti

H e' aiuto in modo preciso a vedere le deformazioni

Se una funzione è di classe C^1 è differenziabile.

Dire che f è differenziabile

$$\underline{u}(p) = \underline{u}(q) + H(q)(p-q) + \underbrace{o(|p-q|)}_{\text{infinitesimo}} \rightarrow$$ anche $\frac{\ }{2}$, tende a zero.



$$\lim_{p \to q} \frac{o(|p-q|)}{|p-q|} = 0$$

H scomponibile in parte

1) Simmetrica
2) Antisimmetrica

$$H = \frac{H+H^T}{2} + \frac{H-H^T}{2}$$

L'unico tensore che fa parte di entrambi le parti è lo 0.

$$W, \quad \exists!\ \omega \subset C \quad W\underline{a} = \omega \wedge a \quad \forall a$$

ω vettore assiale

W determina la rotazione locale

$$\boxed{\begin{aligned} H &= \frac{H+H^T}{2} + \frac{H-H^T}{2} \\ H &= E + W \end{aligned}}$$

↑

Responsabile della deformazione del corpo

Componenti di E.

$$E = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_{xy} & \boxed{\varepsilon_{xz}} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_y & \varepsilon_{yz} \\ \boxed{\varepsilon_{zx}} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_z \end{pmatrix}$$

$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$

↓

Allungamento % lungo le principali

tensore di deformazione

EQUAZIONI CONGRUENZA

relazioni con componenti di H

1) $\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}$

2) $\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}$

3) $\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}$

4) $\varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yx} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)$

5) $\varepsilon_{xz} = \varepsilon_{zx} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right)$

6) $\varepsilon_{yz} = \varepsilon_{zy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right)$

$\underline{u}(u, v, w)$

$|H| \ll 1$

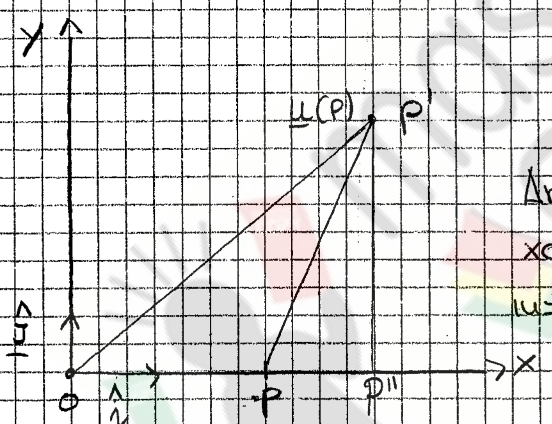
Equazioni di Congruenza

↓

equazioni differenziali <u>una</u> lineari

$E = \frac{1}{2}\left(H + H^T\right)$

SPOSTAMENTO PUNTO P



$|P - O| = \lambda$

$P - O = \lambda \hat{\underline{i}}$

Angolo molto piccolo xché lo spostamento è infinitesimo

Spostamento di p lungo $\hat{\underline{i}}$

$\hat{i}, \hat{j}$ versori

In seguito alla deformazione $P \rightarrow P'$

$$\frac{|P'' - P|}{|P - O|}$$

$P'' - P = u(P) \cdot \hat{\underline{i}}$

Spostamento u del punto P. $\boxed{u(P) = \cancel{u(O)} + E(O)\lambda \hat{\underline{i}} + o(\lambda)}$

$$\frac{\hat{\underline{i}} \cdot u(P)}{\lambda} = \frac{\cancel{\lambda}\,\boxed{\hat{i} \cdot E(O)\, \hat{i}}}{\cancel{\lambda}} + \underbrace{\frac{o(\lambda)}{\lambda}}_{\to 0}$$

Allungamento percentuale $\left(\frac{\text{Allungamento}}{\text{lunghezza iniziale}}\right)$

quando $\lim_{\lambda \to 0}$

Ex misura l'allungamento % delle fibre lungo x