DEF (SP. VETT.)

Sia K un campo, uno sp. vett. su K è un insieme V di elementi dotato di due operazioni binarie:

- una operazione $+_V$ detta somma, che associa a due vettori $u, v \in V$ un vettore $u +_V v$
- una operazione $\cdot_V$ detta prodotto per scalare che associa ad un vettore $v \in V$ e uno scalare $\lambda \in K$ un vett $\lambda v \in V$
- un elemento $0_V \in V$ detto lo zero

che soddisfano le seguenti proprietà

1) COMMUTATIVA
2) ASSOCIATIVA
3) ELEMENTO NEUTRO
4) OPPOSTO
5) DISTRIBUTIVA

TEO FOND.

Se $f(z) = A_n z^n + A_{n-1} z^{n-1} + \dots + A_0$ con $A_n \neq 0$ e $n \geq 1$ è un pol. a coeff. in $\mathbb{C}$ cioè $A_n, \dots, A_0 \in \mathbb{C}$

$\Rightarrow \exists\, 2 \in \mathbb{C}$ e $f(2) = 0$

DEF (SOTTOSP. VETT.)

Sia V uno sp. vett su K. Un sottosp. vett. di V è un sottoinsieme $W \subset V$ t.c.

1) $0_V \in W$
2) Se $u, v \in W \Rightarrow u+v \in W$
3) Se $u \in W$ e $\lambda \in K \Rightarrow \lambda u \in W$

DEF (BASE)

Sia V sp. vett. su K, $v_1, \dots, v_m$ sono una base di $V \iff \forall v \in V \ \exists! \ \lambda_1, \dots, \lambda_m \in K$ t.c. $v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_m v_m$

con $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ le coordinate di v rispetto alla base

DEF (COMB. LINE)

Se V è K-sp. vett. e se $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in K$ e $v_1, \dots, v_m \in V$, una espressione del tipo $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_m v_m$ si dice una combinazione lineare di $v_1, \dots, v_m$

DEF (GENERATORI)

Sia V un K-sp.vett e siano $v_1, \dots, v_m \in V$. $v_1, \dots, v_m$ si dicono dei generatori di V se $\forall v \in V \ \exists \ \lambda_1, \dots, \lambda_m \in K$ t.c. $v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_m v_m$ ($\lambda_1, \dots, \lambda_m$ anche non unici)

DEF (LIN. INDIP.)

Sia V un K-sp. vett e siano $v_1, \dots, v_m \in V$.
$v_1, \dots, v_m$ si dicono lin. indip. se
$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_m v_m = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_m = 0$

DEF (LIN. DIP)

Se V un K-sp. vett e siano $v_1, \dots, v_m \in V$.
$v_1, \dots, v_m$ si dicono lin. dip. se non sono lin. indip., ovvero $\exists\ \lambda_1, \dots, \lambda_m$ non tutti nulli t.c. $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_m v_m = 0$

DEF (SOTTOSP. VETT. GEN.)

Sia V un K-sp. vett e siano $v_1, \dots, v_m \in V$
$\Rightarrow$ il sottosp vett generato da $v_1, \dots, v_m$ è
$\text{span}(v_1, \dots, v_m) = \{ \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_m v_m \mid \lambda_1, \dots, \lambda_m \in K \}$

DEF (SOMMA SOTTOSP)

Sia V sp. vett e U, W sottosp vett
$\Rightarrow U + W = \{ u + w \mid u \in U \text{ e } w \in W \}$

master copy

DEF (APP. LINEARE) ⟶ **OSS 1** $F(0_V) = 0_W$

OSS 2 $F(\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_m v_m) = \lambda_1 F(v_1) + \dots + \lambda_m F(v_m)$

Siano V e W due K sp. vett.

Una funzione $F: V \to W$ si dice lineare o K-lineare se

1) $F(u+v) = F(u) + F(v) \quad \forall u, v \in V$

2) $F(\lambda u) = \lambda F(u) \quad \forall u \in V, \forall \lambda \in K$

DEF (NUCLEO & IMMAGINE)

Siano V e W due K-Sp. vett e sia $F: V \to W$ una app. lineare.

$$\ker F = \{ v \in V \mid F(v) = 0 \}$$

$$\mathrm{Im} F = \{ F(v) \mid v \in V \}$$

PROP

$F: V \to W$ lineare

1) F suriettiva $\iff \mathrm{Im} F = W$

2) F iniettiva $\iff \ker f = \{0\}$

dim

1) Ogni elemento dell'insieme di arrivo si scrive come F(elemento partenza)

$\forall w \in W \ \exists v \in V : F(v) = w$ ⟶ def di F suriettiva

2) ⟹ Poiché F iniettiva $\Rightarrow F(v) = 0_W = F(0_V)$

dall'iniettività ricavo che $v = 0_V \Rightarrow \ker(F) = \{0_V\}$

⟸ $\ker(F) = \{0_V\}$, supponiamo che $F(u) = F(v)$

Allora $F(u-v) = 0_W$ quindi $u - v = 0$

ovvero $u = v$

$\#$

PROP

Sia V sp vett e sia $v_1, \dots, v_n$ base di V
sia W sp. vett e sia $w_1, \dots, w_n \in W$
$\Rightarrow \exists!$ opp. lineare $F: V \to W$ t. c.
$F(v_1) = w_1, \dots, F(v_n) = w_n$

dim

Se $v \in V \Rightarrow v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$
posso scrivere $F(v) = \lambda_1 F(v_1) + \dots + \lambda_n F(v_n) =$
$= \lambda_1 w_1 + \dots + \lambda_n w_n$

ho dimostrato l'unicità.
Ora devo dimostrare la linearità
siano $u, v \in V$ $v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$
$u = \mu_1 v_1 + \dots + \mu_n v_n$

quindi $v+u = (\lambda_1 + \mu_1) v_1 + \dots + (\lambda_n + \mu_n) v_n$

$F(v+u) = (\lambda_1 + \mu_1) w_1 + \dots + (\lambda_n + \mu_n) w_n =$

$= \lambda_1 w_1 + \dots + \lambda_n w_n + \mu_1 w_1 + \dots + \mu_n w_n =$

$= F(v) + F(u)$

Se inoltre $\lambda \in K$ ricavo $\lambda v = (\lambda\lambda_1) v_1 + \dots + (\lambda\lambda_n) v_n$
$F(\lambda v) = (\lambda\lambda_1) w_1 + \dots + (\lambda\lambda_n) w_n =$

$= \lambda F(v)$

#

master COPY