Serena Donati 8-10-16

$12,87 = \frac{1287}{100}$

$x = 13,427\overline{7} \rightarrow \frac{13427-134}{990} = \frac{13293}{990}$

TEOREMA:

↳ Tesi: $\sqrt{2}$ non è un numero razionale

Dimostrazione per assurdo:

Suppongo che $\sqrt{2}$ sia un numero razionale $\Rightarrow \sqrt{2} = \frac{a}{b}$ con a, b interi e primi tra loro

$\Rightarrow 2 = \frac{a^2}{b^2} \wedge 2b^2 = a^2$

↳ se a^2 è pari $\Rightarrow a$ è pari $\rightarrow$ posso scrivere $a = 2c$

per forza pari

$\Rightarrow 2b^2 = (2c)^2 \Rightarrow 2b^2 = 4c^2 \Rightarrow b^2 = 2c^2$

↳ allora anche b è pari (per ragionamento precedente)

$\Rightarrow$ posso scrivere $b = 2d$ ma allora se $a = 2c$ e $b = 2d$ a e b non sono primi tra loro $\Rightarrow$ CONTRADDIZIONE

DEFINIZIONE

regola x ottenere dal una coppia di elementi di K un terzo numero $\in K$

↳ Un campo è un insieme K munito di due operazioni $+, \cdot$ e nel quale abbiamo fissato due elementi $0, 1$ che soddisfano le seguenti proprietà: ($0 = 0_K$, $1 = 1_K$)

1. COMMUTATIVA: $\forall a, b \in K \quad a+b = b+a \wedge a \cdot b = b \cdot a$
2. ASSOCIATIVA: $\forall a, b, c \in K \quad (a+b)+c = (b+c)+a$
3. ELEMENTO NEUTRO: $\forall \quad (a \cdot b) \cdot c = (b \cdot c) \cdot a$
   ↳ $\forall a \in K \quad a+0 = a \wedge a \cdot 1 = a$
4. OPPOSTO E INVERSO: $\forall a \in K \; \exists b \in K \mid a+b = 0$
   $\forall a \in K \wedge a \neq 0 \; \exists b \in K \mid a \cdot b = 1$
5. DISTRIBUTIVA $\forall a, b, c \in K \quad a(b+c) = a \cdot b + a \cdot c$

MASTER COPY Tel. 050 8312126 Cell. 388 9831745

Osservazione 1

$\forall a \in K \quad 0 \cdot a = 0 \rightarrow 0 \cdot a = (0+0) \cdot a$

↓

Applico la distributiva: $0 \cdot a = 0 \cdot a + 0 \cdot a$

$\Rightarrow x = x + x$

Per l'assioma 4 $\exists y \in K \mid x + y = 0$

Sommo all'equazione precedente y ad entrambi i membri:

$\Rightarrow \underbrace{x + y}_{=0} = x + \underbrace{(x + y)}_{=0} \quad \Rightarrow 0 = x + 0$ ma $x \neq 0 = 0 \quad \Rightarrow \boxed{x = 0}$

Osservazione 2

Se $a \in K \quad \exists b \in K$ e $a + b = 0$

$\exists_1$ = esiste ed è unico

↳ Supponiamo che vi siano 2 valori di $b \mid a + b = 0$

$\Rightarrow a + b_1 = a + b_2 = 0$ ← sommo b ad entrambi i membri

$\underbrace{(b + a)}_{=0} + b = \underbrace{(b + a)}_{=0} + c \quad \Rightarrow \boxed{b = c} \quad \Rightarrow b$ è unico!

$\Rightarrow$ l'opposto è unico e lo definiamo con $-a$

Definizione

- $x - y = x + (-y)$

- $\forall a \in K$ e $a \neq 0 \quad \exists_1 b \in K \mid a \cdot b = 1$

$\Rightarrow b = \frac{1}{a} = a^{-1}$

NUMERI COMPLESSI

↳ come insieme $\mathbb{C} = \mathbb{R}$ → si indicano con $(a+ib)$ con $a, b \in \mathbb{R}$

- SOMMA

$$(a+ib)+(c+id) = a+c+i(b+d)$$

- PRODOTTO

$$(a+ib)\cdot(c+id) = (ac-bd)+i(bc+ad)$$

- ELEMENTO NEUTRO

$(0+i0)+(a+ib) = a+ib$ ← per la somma

$(1+0i)+(a+ib) = a+ib$ ← per il prodotto

- DIMOSTRARNE PROPRIETA'

$\mathbb{C}$ con la somma e il prodotto appena definiti e con $0+i0=0$ è un campo, ovvero verifica le proprietà della lezione precedente

↳ Verifico solo che vale la commutativa per il prodotto e che esistono opposto e inverso

- $(a+ib)(c+id) = (c+id)(a+ib)$

$(ac-bd)+i(bc+ad) \quad (ca-db)+i(da+bc)$

- $(a+ib)+(-a+i(-b)) = 0$

- Siano $(a,b) \neq 0$ e osservo che $a^2+b^2>0$ ⇒ pongo $c = \frac{a}{a^2+b^2}$ e $d = \frac{-b}{a^2+b^2}$

$$\Rightarrow (a+ib)\left(\frac{a}{a^2+b^2} - i\cdot\frac{b}{a^2+b^2}\right) = \left(\frac{a^2+b}{a^2+b^2} + i\left(\frac{-ab+ab}{a^2+b^2}\right)\right) = (1,0)$$

OSSERVAZIONE

$\mathbb{C}$ contiene i numeri reali ⇒ $R = \{a+i\cdot 0 \text{ con } a \in \mathbb{R}\}$

↓

se faccio la somma tra due numeri reali ottengo comunque un numero reale (anche se sono in $\mathbb{C}$)

$(a+i0)+(b+i0) = a+b$

- $i = (0+1i)$

- $i^2 = -1$

↳ Avendo definito i possiamo considerare $a+ib$ come somma fra un numero reale e il risultato del prodotto fra il numero reale b ed il numero complesso i

$\Rightarrow (a+ib)\cdot(c+id) = (a+ib)\cdot c + (a+ib)\cdot id = ac + ibc + adi + i^2 bd =$
$(ac-bd)+i(ad+bc)$

Per casa:

$z = 1+i$

$w = 3+2i$

Calcola $z\cdot w$, $z+w$, $\frac{z}{w}$, $\frac{w}{z}$

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

14-10-16

$f(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n$ con $a_i \in \mathbb{C}$

allora $f(z) = (z-\alpha_1)(z-\alpha_2)\dots(z-\alpha_n)$ con $\alpha_i \in \mathbb{C}$

$\{z_0 : f(z_0) = 0\} = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$

OSSERVAZIONE: A meno di combuore l'ordine $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n$ sono univocamente determinati

esempio

$f(z) = (z-1)(z-8)(z+i)(z-i) \neq (z-1)(z-2)(z+5)(z+6)$

$(z-8)(z-i) \neq (z-2)(z+5)$

sono due polinomi diversi perché si annullano per valori diversi

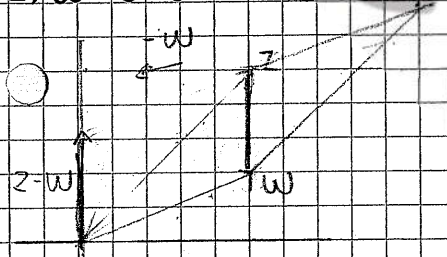
$f(z) = (z-\beta_1)(z-\beta_1)(z-\beta_n)(z-\beta_n)(z-\beta_n) = (z-\beta)^{m_i} \dots (z-\beta_n)^{m_h}$

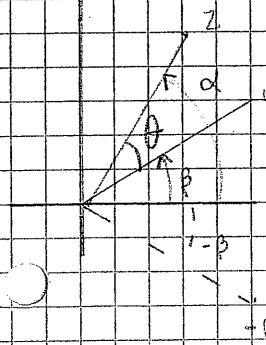
con $\beta \in \mathbb{C}$ tutti distinti $\beta_i \neq \beta_j$ con $i \neq j$

$\Rightarrow$ Zeri(f) = Radici(f) = $\{\beta_i \dots \beta_n\}$ e m_i si dice la molteplicità della radice β_i

Distanza tra due punti

$z, w \in \mathbb{C}$





$z \cdot \bar{w} = |z| \cdot |w| e^{i\alpha} \cdot e^{-i\beta} = |z||w| e^{i(\alpha-\beta)}$

$|z| = |z| e^{i\alpha} \quad w = |w| e^{i\beta} \quad \bar{w} = |w| e^{-\beta}$

$= z \cdot \bar{w} = |z| \cdot |w| e^{i\theta}$

$\Rightarrow e^{i\theta} = \frac{z \cdot \bar{w}}{|z| \cdot |w|}$

MASTER COPY
Tel. 050 83121126
Cell. 388 9837745