Università di Pisa

Algebra e Geometria

2021-2022

master COPY COPISTERIA



master COPY COPISTERIA

Concetti più importanti di algebra e geometria

SPAZIO VETTORIALE

K campo

Uno spazio vettoriale su K è il dato di:

→ un insieme V

→ un'operazione $+_v$ detta somma che dati 2 elementi $u, v \in V$ determina un terzo elemento $u +_v v$ di V

→ un'operazione $\cdot_v$ detto prodotto per scalare che dati un $\lambda \in K$ e $v \in V$ determina un nuovo elemento $\lambda \cdot_v v \in V$

→ un elemento $0_v \in V$ detto lo zero

che soddisfano queste proprietà:

1. COMMUTATIVA
   $\forall u, v \in V \quad u +_v v = v +_v u$
2. ASSOCIATIVA
   $\forall u, v, w \in V \quad (u +_v v) +_v w = u + (v +_v w)$
   $\forall \lambda, \alpha \in K \text{ e } \forall v \in V \quad (\lambda\alpha) \cdot_v v = \lambda \cdot_v (\alpha \cdot_v v)$
3. ELEMENTO NEUTRO
   $\forall v \in V \quad 0_v +_v v = v +_v 0_v = v$
   $\forall v \in V \quad 1 \cdot_v v = v$
4. OPPOSTO
   $\forall v \in V \ \exists_1 u \in V$ tale che $u +_v v = 0_v$
5. DISTRIBUTIVA
   $\forall \lambda \in K \quad \forall u, v \in V \quad \lambda \cdot_v (u +_v v) = \lambda \cdot_v u + \lambda \cdot_v v$
   $\forall \lambda, \alpha \in K \quad \forall v \in V \quad (\lambda + \alpha) \cdot_v v = \lambda \cdot_v v + \alpha \cdot_v v$

master COPY COPISTERIA

PROPOSIZIONE

$+_v$ $\cdot_v$ 0_v verificano le proprietà 1 – 5, quindi V è un K- spazio vettoriale

dim. ③ $0_v +_v v = v \quad \forall v \in V$

infatti se $v = (x_1 \cdots x_m)$

$0_v +_v (x_1 \cdots x_m) = (0 + x_1, \cdots, 0 + x_m) = (x_1 \cdots x_m)$

$1 \cdot_v v = v \quad \forall v \in V$

infatti se $v = (x_1 \cdots x_m)$

$1 \cdot_v (x_1 \cdots x_m) = (1 \cdot x_1, \cdots, 1 \cdot x_m) = (x_1 \cdots x_m)$

④ $\forall v \in V \ \exists_1 u : u +_v v = 0_v$

infatti sia $v = (x_1 \cdots x_m)$ e $u = (y_1 \cdots y_m)$ allora

$u +_v v = (x_1 + y_1, \cdots, x_m + y_m) = 0_v$ se e solo se

$y_1 = -x_1 \quad y_m = -x_m$ e quindi u esiste ed è unico

OSSERVAZIONE

V spazio vettoriale su K, allora

1) $0_K \cdot_v v = 0_v \quad \forall v \in V$
2) $\lambda \cdot_v 0_v = 0 \quad \forall v \in V$

SOTTOSPAZI VETTORIALI → generalizza il concetto di rette e piani passanti per l'origine

V spazio vettoriale su K
Un sottospazio vettoriale di V è un sottoinsieme $W \subset V$ tale che →
- $0_V \in W$
- se $u, v \in W \Rightarrow u+v \in W$
- se $\lambda \in K$ e $u \in W \Rightarrow \lambda u \in W$

Un sottospazio vettoriale è proprio se è diverso da V e 0_V

BASE

V spazio vettoriale su K e $v_1 \dots v_m \in V$.
La lista di $v_1 \dots v_m$ è una base di V se per ogni $v \in V$ esistono univocamente determinati $\lambda_1 \dots \lambda_m \in K$ tali che
$v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_m v_m$ → combinazione lineare
Chiamo $\lambda_1 \dots \lambda_m$ le coordinate di v rispetto a tale base e le indico così ↓

$$[v]_{v_1 \dots v_m} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_m \end{pmatrix}$$



GENERATORI

V K spazio vettoriale
$v_1 \dots v_m \in V$
$v_1 \dots v_m$ sono generatori di V se $\forall v \in V$ esistono $\lambda_1 \dots \lambda_m \in K$ tali che $v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_m v_m$

La differenza rispetto a una base è che in questo caso non è richiesto che $\lambda_1 \dots \lambda_m$ siano unici

VETTORI LINEARMENTE INDIPENDENTI

V K-spazio vettoriale
$v_1 \dots v_m \in V$
$v_1 \dots v_m$ si dicono linearmente indipendenti se $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_m v_m = 0$ e implica $\lambda_1 = \dots = \lambda_m = 0$

PROPOSIZIONE

V K-spazio vettoriale
$v_1 \dots v_m \in V$ lin. indip.
Se $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_m v_m = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_m v_m$ allora $\lambda_1 = \alpha_1 \quad \lambda_m = \alpha_m$

dim. $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_m v_m = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_m v_m$
$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_m v_m - \alpha_1 v_1 - \dots - \alpha_m v_m = 0$
$(\lambda_1 - \alpha_1) v_1 + \dots + (\lambda_m - \alpha_m) v_m = 0$
poiché $v_1 \dots v_m$ sono lin. indip. allora $\lambda_1 = \alpha_1 \quad \lambda_m = \alpha_m$

PROPOSIZIONE

V K-spazio vettoriale
$v_1 \dots v_m \in V$
$v_1 \dots v_m$ è una base $\Leftrightarrow$ $v_1 \dots v_m$ sono lin. indip. e sono generatori

dim. ($\Rightarrow$) supponiamo che siano una base, allora sono sicuramente dei generatori poiché ogni vettore si scrive come combinazione lineare di $v_1 \dots v_m$

↓

dimostro che sono lin. indip.

↓

sia $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_m v_m = 0_v \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_m = 0$

Poiché $v_1 \dots v_m$ sono una base, 0_v si scrive in modo unico come combinazione lineare di $v_1 \dots v_m$ ↳ $\lambda_1 \dots \lambda_m = 0$

($\Leftarrow$) suppongo che $v_1 \dots v_m$ siano lin. indip. e generatori

Sia $v \in V$, siccome $v_1 \dots v_m$ sono generatori, esistono $\lambda_1 \dots \lambda_m$ tali che $v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_m v_m$

↓

sono anche lin. indip.

↓

$\lambda_1 \dots \lambda_m$ sono univocamente determinati

PROPOSIZIONE

V K-spazio vettoriale

$v_1 \dots v_m \in V$

$v_1 \dots v_m$ sono lin. dip. $\Leftrightarrow$ esistono $\lambda_1 \dots \lambda_i \dots \lambda_m$ tali che $v_i = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_i v_i + \dots + \lambda_m v_m$

dim. $v_1 \dots v_m$ sono lin. dip. $\longrightarrow$ esistono $\lambda_1 \dots \lambda_m$ non tutti nulli tali che $\lambda_1 v_1 + \lambda_m v_m = 0$

Sia $\lambda_i \neq 0$, allora

$\lambda_i v_i = -\lambda_1 v_1 - \lambda_m v_m$

$v_i = -\frac{\lambda_1}{\lambda_i} v_1 - \frac{\lambda_m}{\lambda_i} v_m \longrightarrow$ $v_1 \dots v_m$ sono lin. dip.

SOTTOSPAZIO VETTORIALE GENERATO

V K-spazio vettoriale

$v_1 \dots v_m \in V$

Il sottospazio vettoriale generato da $v_1 \dots v_m$ è

$\text{span}(v_1 \dots v_m) = \{ \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_m v_m : \lambda_1 \dots \lambda_m \in K \}$

Un generale $X \subset V$ è un sottoinsieme di V, il sottospazio vettoriale generato da X è

$\text{span}(X) = \{ \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_m v_m : \lambda_1 \dots \lambda_m \in K, v_1 \dots v_m \in X \}$

Per convenzione: $\text{span}(\phi) = \{0_v\}$

PROPOSIZIONE

V K-spazio vettoriale

$v_1 \dots v_m \in V$

1. $\text{span}(v_1 \dots v_m)$ è un sottospazio vettoriale di V
2. se W è un sottospazio vettoriale di V e $v_1 \dots v_m \in W$ allora $\text{span}(v_1 \dots v_m) \subset W$

dim. ① • $0_V \in \text{span}(v_1 \dots v_m) \longrightarrow 0_V = 0v_1 + \dots + 0v_m$

• se $u, v \in \text{span}(v_1 \dots v_m) \Rightarrow u = d_1v_1 + \dots + d_mv_m$
$v = d_1v_1 + \dots + d_mv_m$
$u+v = (d_1+d_1)v_1 + \dots + (d_m+d_m)v_m \in \text{span}(v_1 \dots v_m)$

• se $u \in \text{span}(v_1 \dots v_m)$ e $d \in K \Rightarrow u = d_1v_1 + \dots + d_mv_m$
e $du = (dd_1)v_1 + \dots + (dd_m)v_m \in \text{span}(v_1 \dots v_m)$

② voglio mostrare che se $v \in \text{span}(v_1 \dots v_m) \Rightarrow v \in W$
Sia $v = d_1v_1 + \dots + d_mv_m$
Siccome $v_1 \dots v_m \in W$ e W è sottospazio, ottengo che
$d_1v_1 \dots d_mv_m \in W$ per la 3ª proprietà dei sottospazi, quindi
$v = d_1v_1 + \dots + d_mv_m \in W$ per la 2ª proprietà dei sottospazi

INTERSEZIONE E SOMMA DEI SOTTOSPAZI

PROPOSIZIONE

U, W sottospazi di V
$U \cap W$ è un sottospazio → l'unione non è detto che sia un sottospazio

dim. • $0_V \in U \cap W \longrightarrow 0_V \in U$, $0_V \in W$ } sono sottospazi

• se $u \in U \cap W$, $v \in U \cap W$ } $\Rightarrow u+v \in U \cap W$
$u, v \in U \rightarrow u+v \in U$
$u, v \in W \rightarrow u+v \in W$
$\rightarrow u+v \in U \cap W$

• $u \in U \cap W$, $d \in K \Rightarrow du \in U \cap W$
se $u \in U \rightarrow du \in U$
se $u \in W \rightarrow du \in W$ } $du \in U \cap W$

DEFINIZIONE

V spazio vettoriale su K
U, W sottospazi vettoriali
$U + W = \{u+w : u \in U, w \in W\}$
Inoltre $U \cup W \subset U+W$

dim. • $0_V \in U+W \longrightarrow 0_V = 0_V + 0_V$ e $0_V \in U \cap W$

• se $v_2 \in U+W$, $v_2 \in U+W$ } $\Rightarrow v_2 + v_2 \in U+W$
$v_2 = u_1 + w_1$, $v_2 = u_2 + w_2$
$u_1, u_2 \in U$
$w_1, w_2 \in W$

$v_2 + v_2 = u_1 + u_2 + w_1 + w_2$ Inoltre $u_1+u_2 \in U$, $w_1+w_2 \in W$ } $v_1+v_2 \in U+W$