MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

INSIEME

è una collezione di oggetti.

COME DESCRIVERE UN INSIEME:

- elencare gli elementi

A è l'insieme i cui elementi sono i numeri 1, 3 e 5

- descrivere la proprietà degli elementi

A è l'insieme dei numeri x interi con x dispari e $1 \leq x \leq 5$

B è l'insieme dei numeri interi dispari

$A = \{1; 3; 5\}$ $A\{x \mid x \text{ è un numero intero}\}$

↳ tale che

$C\{x : P(x)\}$

è una frase che dipende dalla variabile x della quale posso valutare la verità o la falsità se al posto di x metto un elemento di un insieme.

$C = \{x \text{ APPARTENENTE A } B : P(x)\}$

$\mathbb{N}$ è l'insieme dei numeri NATURALI

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$

$\mathbb{Z}$ è l'insieme dei numeri INTERI

$\mathbb{Z} = \{\dots; -2; -1; 0; 1; 2; \dots\}$

$\mathbb{Q}$ è l'insieme dei numeri RAZIONALI

$\mathbb{Q} = \left\{\frac{a}{b} \text{ con } a; b \in \mathbb{Z} : P(x)\right\}$

$P(x)$ è la frase

$1 \leq x \leq 5$ E x È DISPARI

$P(0)$ È FALSA $P(1)$ È VERA $P(7)$ È FALSA

LINGUAGGIO DEGLI INSIEMI

$\in$ APPARTENENTE

$\notin$ NON APPARTENENTE

Se C è un insieme finito di elementi

$|C|$ $\#(C)$ $\text{card}(C)$ è la cardinalità di C

e vuole indicare il numero degli elementi dell'insieme

Se C non ha un numero limito di elementi $|C| = \infty$

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

UN INSIEME PUÓ ESSERE A SUA VOLTA ELEMENTO DI UN INSIEME
$A=\{1;3;5\}$ $B=\{7;9;10;11\}$ $C=\{A;B\}$

$D=\{x\in\mathbb{Q} : x^4+3x^2+6x+9=0\}$

$E=\{0;A\}$ $|E|=1$

$\emptyset$ = insieme vuoto $|\emptyset|=0$

$F=\{\emptyset\}$ $|F|=1$ $G=\{\emptyset;\{\emptyset\}\}$ $|G|=2$

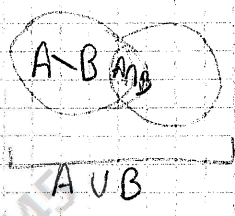
$\mathbb{N}\neq\mathbb{Q}\neq\mathbb{R}$ -> l'insieme dei numeri reali

UNA EQUAZIONE $\underbrace{x^7+5x^5+3x^4+4x^4+4x^3+x+35}_{P(x)}=0$ DEFINISCE

UNA FRASE DI $P(x)$ CON LE CARATTERISTICHE CHE VOGLIAMO E LE SOLUZIONI SONO L'INSIEME: $\{x\in\mathbb{R} : P(x)=0\}$

OPERAZIONI TRA INSIEMI

- A UNIONE B = $A\cup B=\{x : x\in A \text{ o } x\in B\}$
- A INTERSEZIONE B = $A\cap B=\{x : x\in A \text{ e } x\in B\}$
- $A\setminus B$ = A SENZA B = $\{x\in A : x\notin B\}$



- $A\times B$ IL PRODOTTO TRA A E B

se $a\in A$ e $b\in B$ $(a;b)$ si chiama la coppia a, b

$A\times B=\{(a;b) : a\in A \text{ e } b\in B\}$

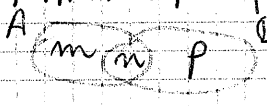
$A=\{1;3;5\}$ $B=\{5;7\}$

$A\times B=\{(1;5);(1;7);(3;5);(3;7);(5;5);(5;7)\}$

$|A\times B|=|A|\times|B|=3\cdot 2=6$

$|A\cup B|=|A|+|B|=3+2=5$

$|A\cup B|\neq|A\cap B|=|A|+|B|$ se $|A\cap B|=0$



$m=|A-B|$ $n=|A\cap B|$ $p=|B-A|$

$|A|=m+n$ $|B|=n+p$ $|A\cap B|=n$ $|A\cup B|=m+n+p$

Le falsa è $P\Rightarrow Q$

$P\Rightarrow Q$ è vera o quando la premessa è falsa (P è falsa) o quando Q è vera

$P\Rightarrow Q$ è equivalente a Q o (NON P)

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

QUANTIFICATORI

$P(x)$

- esiste $x : P(x)$ $\quad \exists x : P(x)$ $\quad \exists x \in C : P(x)$

É VERA SOLO SE ESISTE UN ELEMENTO PALECHE $P(x)$ É VERA

- per ogni $x : P(x)$ $\quad \forall x : P(x)$ $\quad \forall x \in C \; P(x)$

É VERA PER OGNI $c \in C$ $P(x)$ É VERA

NUMERI COMPLESSI

$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \text{ con } a, b \in \mathbb{Z} \text{ e } b \neq 0 \right\}$

i numeri razionali si possono descrivere anche come i numeri che hanno un numero limito di cifre dopo la virgola o che sono periodici (numeri in cui non ottengo mai resto 0)

TEOREMA

$\sqrt{2}$ NON É RAZIONALE

DIMOSTRAZIONE per assurdo

Suppongo che radice di 2 ($\sqrt{2}$) sia razionale e deduco il fatto che non può essere vero. Posso allora scrivere $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ a, b interi e $b \neq 0$ e $\frac{a}{b}$ ridotta ai minimi termini cioé a e b non hanno fattori in comune in particolare a e b non sono entrambi pari.

$2 = \frac{a^2}{b^2}$ $\quad 2b^2 = a^2$

$\downarrow a^2$ allora é pari quindi anche a é pari

$a = 2c$

$2b^2 = (2c)^2 = 4c^2$ $\quad b^2 = 2c^2$ e quindi anche b é pari. Ho trovato un assurdo. C.V.D.

PROPRIETÀ ALGEBRICHE DI NUMERI RAZIONALI E NUMERI REALI

K un insieme $K = a; \mathbb{R}$

- É definita una somma dati $a, b \in K$ é definita $a+b$
- $0 \in K$
- É definito un prodotto dati $a, b \in K$ é definita $a \cdot b$
- $1 \in K$

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

- PROPRIETÁ COMMUTATIVA $\forall a, b \in K$
  $a \cdot b = b \cdot a$
- PROPRIETÁ ASSOCIATIVA $(a+b)+c = a+(b+c)$
  $(a \cdot b) c = a(b \cdot c)$
- PROPRIETÁ DI 0 E 1 $\forall a \in K$
  $0+a=a$ $\quad 1 \cdot a = a$
- ESISTENZA DI UN OPPOSTO $\forall a \in K \ \exists_1 b : a+b=0$
  b LO INDICHIAMO CON $-a$
- ESISTENZA DELL'INVERSO $\forall a \in K$ e $a \neq 0 \ \exists_1 b : a \cdot b = 1$
  b LO INDICHIAMO COME $\frac{1}{a}$ O CON a^{-1}
- PROPRIETÁ DISTRIBUTIVA $\forall a, b, c \in K$
  $a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$

un insieme K con $+, \cdot, 0, 1$ CHE SODDISFA TALI PROPRIETÁ SI CHIAMA CAMPO. TUTTE LE PROPRIETÁ ALGEBRICHE CHE USIAMO PER MANIPOLARE LE ESPRESSIONI DERIVANO DA QUELLE ELENCATE.

DIMOSTRIAMO $0 \cdot a = 0$

$x = 0 \cdot a \quad 0 \cdot a = (0+0) \cdot a = 0 \cdot a + 0 \cdot a$

$x = x + x$ SOMMO $(-x)$ $\quad x + (-x) = (x+x) + (-x)$

$x - x = x + (x-x) \quad 0 = x \rightarrow 0 \cdot a = 0$

$x^2 = -1$ I NUMERI COMPLESSI SONO UN CAMPO DOVE ANCHE TALE EQUAZIONE HA SOLUZIONE.

DEFINIZIONE NUMERI COMPLESSI $\mathbb{C} = R \times R = \{(a, b) : a, b \in R\}$

AL POSTO DI SCRIVERE (a, b) dobbiamo scrivere: $a + bi$

$(a, b) + (c, d) = (a+c, b+d) \quad (a+bi) + (c+di) = (a+c) + (b+d)i$

PER LA SOMMA VALGONO LA PROPRIETÁ COMMUTATIVA E ASSOCIATIVA

$(a, b) + (c, d) = (c, d) + (a, b) \rightarrow (a+c, b+d) = (c+a, d+a)$

$0_{\mathbb{C}} = (0, 0) \quad (0, 0) + (a, b) = (0+a, 0+b) = (a, b)$

ESISTENZA DELL'OPPOSTO $(a, b) + (-a, -b) = (a-a, b-b) = (0, 0)$

DEFINIZIONE DEL PRODOTTO

$i^2 = -1 \quad 0 + 1i = (0, 1) \quad (0, 1)(0, 1) = (-1, 0)$

$(a, b)(c, d) = (ac - bd, ad + bc) \quad (a+bi)(c+di) = ac + adi + bic$

$+ (bi)(di) = ac + bdi^2 + (ad+bc)i = ac - bd + (ad+bc)i$

OSSERVAZIONE → DEFINIZIONE

Dato $a \in K$ $\exists_1 \in K$: $b + a = 0$

$b = -a$

DEFINIZIONE

$c - d = c + (-d)$

Se $d \neq 0$ $\frac{c}{d} = c \cdot \frac{1}{d}$

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

$(-a) \cdot b = -(a \cdot b)$

$(-a) \cdot (-b) = a \cdot b$

$0 = 0 \cdot b$

$a + (-a)b = a \cdot b + (-a)b$

$\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$

$(a; b) + (c; d) = (a + c; b + d)$

$(a; b) \cdot (c; d) = (ac - bd; ad + bc)$

TEOREMA

$\mathbb{C}$ con $+_{\mathbb{C}}$; $\cdot_{\mathbb{C}}$; $0_{\mathbb{C}}$; $1_{\mathbb{C}}$ è un campo definite la somma, il prodotto, 0 e 1

PROPRIETÀ DI $0_{\mathbb{C}}$ e $1_{\mathbb{C}}$

$(0; 0) + (a; b) = (0 + a; 0 + b) = (a; b)$

$(1; 0)(a; b) = (1a + 0b; 1b + 0a) = (a; b)$

PROPRIETÀ DISTRIBUTIVA

$(a; b) \cdot_{\mathbb{C}} ((c; d) + (e; f)) = (a; b) \cdot ((c + e); (d + f)) =$

$= (a \cdot (c + e) - b(d + f); a(d + f) + b(c + e)) =$

$= (ac + ae - bd - bf; ad + bc + af + bc) =$

$= ((ac - bd) + (ae - bf); (ad + bc) + (af + bc)) =$

$= (ac - bd; ad + bc) + (ac - bf; af + bc)$

OPPOSTO

$-(a; b) = (-a; -b)$

PROPRIETÀ COMMUTATIVA ASSOCIATIVA

$(a; b) \neq (0; 0)$ $\frac{1}{(a; b)} = \left(\frac{a}{a^2 + b^2}; \frac{-b}{a^2 + b^2}\right)$