GEOMETRIA E ALGEBRA LINEARE

INSIEME = collezione di oggetti di diverso tipo (numeri, parole, persone) non per forza omogeneo.
Un insieme si può descrivere in due modi: per elencazione, ovvero fare la lista dei suoi elementi; oppure descrivendo le proprietà degli elementi.
Esempio:

$A = \{1, 7, \text{PAROLA}\}$ per elencazione

$B = \{x \in \mathbb{N} / x \text{ è pari}\}$ per proprietà

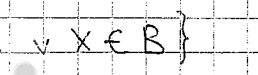
B è l'insieme di tutti i numeri positivi pari (scritto a parole)

(scritto in simboli)

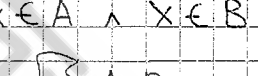
Dati due insiemi, A e B, si può fare:



UNIONE DI INSIEMI: $A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}$



INTERSEZIONE DI INSIEMI: $A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}$



A senza B: $A \setminus B = \{x \in A : x \notin B\}$



A CONTENUTO IN B: $A \subseteq B = \{x \in A \Rightarrow x \in B\}$

PRODOTTO DI INSIEMI: $A \times B = \{(a,b) : a \in A \wedge b \in B\}$

è un insieme completamente nuovo rispetto all'insieme di partenza, è l'insieme delle coppie (a,b), che sono oggetti nuovi formati da un elemento del primo insieme e un elemento del secondo.
Si può fare anche con 3 insiemi: non sarà più l'insieme delle coppie ma delle triple. $(A \times B \times C = \{(a,b,c) : a \in A \wedge b \in B \wedge c \in C\})$
Il piano cartesiano è un esempio di prodotto tra 2 insiemi: $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

MASTER COPY
Tel. 050 831 21 26
Cell. 388 9837745

Le EQUAZIONI sono modi per descrivere gli insiemi
Esempio:

$x^2 = 9 \rightarrow A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 = 9\}$; si può scrivere anche per elencazione perché è un esempio facile $A = \{-3, 3\}$

$y = x^2 + 1 \rightarrow B = \{x, y \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : y = x^2 + 1\}$; avendo infinite soluzioni non posso scriverlo per elencazione

Anche i SISTEMI sono modi per descrivere gli insiemi solo che anziché avere un'equazione si ha più equazioni e si cercano le soluzioni che soddisfano entrambe le equazioni
Esempio:

- $\begin{cases} x^2y + y = 0 \\ x^2y + xy = 0 \end{cases} \rightarrow C = \{x, y \in \mathbb{R}^2 : x^2y + y = 0 \wedge x^2y + xy = 0\}$

$\Rightarrow \begin{cases} y(x^2 + 1) = 0 \\ x^2y + xy = 0 \end{cases}$ ← $x^2 + 1$ è sempre $\geq 1 \Rightarrow \neq 0 \ \forall x$, $y = 0$

$\Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x^2y + xy = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$ → l'insieme C si può anche semplificare: $C = \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2\}$

- $D = \{$ l'insieme degli y in $\mathbb{R}$ tale che l'equazione nella variabile x, $x^2 + 2(y+1)x + y^2 = 0$, abbia soluzione $\}$

$D = \{ y \in \mathbb{R} : \exists\, x \in \mathbb{R}$ che soddisfa $x^2 + 2(y+1)x + y^2 = 0 \}$

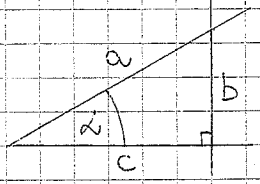
Una equazione $ax^2 + bx + c = 0$ ha soluzione se $\Delta = b^2 - 4ac \geq 0$

$b = 2(y+1) \quad a = 1 \quad c = y^2 \Rightarrow \Delta = 4(y+1)^2 - 4y^2 = 8y + 4$

$\Delta \geq 0 \quad 8y + 4 \geq 0 \Rightarrow y \geq -1/2$

L'insieme D si può semplicare: $D = \{ y \in \mathbb{R} : y \geq -1/2 \}$

TRIGONOMETRIA

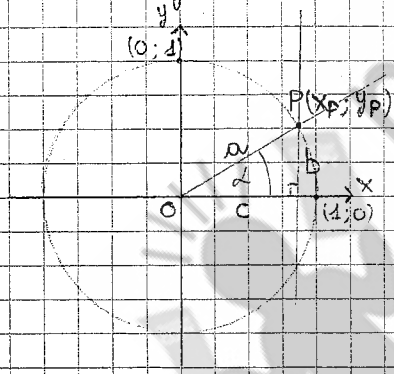


$\sin\alpha = \frac{b}{a}$

$\cos\alpha = \frac{c}{a}$

questa definizione è corretta solo per $\alpha < 90°$, perché per $\alpha \geq 90°$ comporta un errore sul segno

Per definire più correttamente il seno e il coseno si utilizza la circonferenza goniometrica: $x^2 + y^2 = 1$



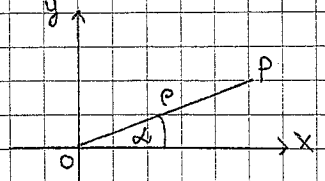
$a = 1$
$b = y_P$
$c = x_P$

$$\begin{cases} \sin\alpha = y_P \\ \cos\alpha = x_P \end{cases} \Rightarrow P(\cos\alpha ; \sin\alpha)$$

L'angolo oltre che in gradi si può misurare anche in radianti:

2π rad $= 360° \Rightarrow 1$ rad $= \frac{360°}{2\pi} \qquad 1° = \frac{2\pi}{360°}$ rad

COORDINATE POLARI sono un modo analogo per trovare la posizione di un punto senza avere le coordinate x, y. È necessaria la distanza del punto dall'origine e l'angolo che questa distanza forma con l'asse delle x (o con l'asse delle y) che ci fornisce la direzione



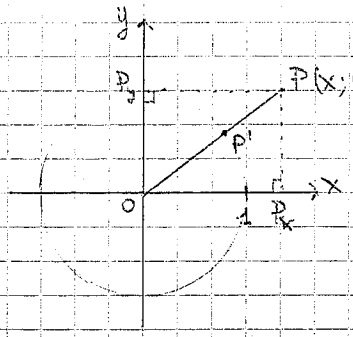
MODULO $P = |OP| = \rho P$

ARGOMENTO $P = \alpha = \arg(P)$

$P(x ; y) : x = ?, \; y = ? \Rightarrow$ se $\rho = 1$ allora $x = \cos\alpha$, $y = \sin\alpha$

se ρ è generico allora $\begin{cases} x = \rho\cos\alpha \\ y = \rho\sin\alpha \end{cases}$

MASTER COPY
Tel. 050 8312125
Cell. 338/9837745



$\rho = ?$, $\alpha = ?$

$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$

per trovare l'argomento prendiamo P' che è l'intersezione tra $\overline{OP}$ e la circonferenza goniometrica
$P'(x'; y')$: $x' = x/\rho$, $y' = y/\rho$

Poichè P' è un punto sulla circonferenza deve verificare $(x')^2 + (y')^2 = 1$, quindi preso un generico α si ha che $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$ e viceversa presi due numeri u, v, tali che $u^2 + v^2 = 1$, ne segue che esiste α tale che $\cos\alpha = u$, $\sin\alpha = v$

$\rightarrow u = x/\rho$, $v = y/\rho$ $\Rightarrow$ $\begin{cases} x = \rho\cos\alpha \\ y = \rho\sin\alpha \end{cases}$

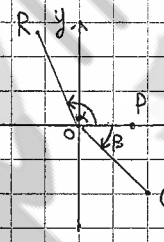
NOTA: esiste ed è unico l'angolo α, ma esistono molti numeri che corrispondono ad α $(0° = 360°)$

$\alpha: \begin{cases} \cos\alpha = u \\ \sin\alpha = v \end{cases}$ $\beta: \begin{cases} \cos\beta = u \\ \sin\beta = v \end{cases}$ $\Rightarrow$ $\beta = \alpha + K360°$ (misura in gradi) $\vee$ $\beta = \alpha + 2K\pi$ (misura in radianti) $\quad K \in \mathbb{Z} = \{\dots, -1, 0, 1, \dots\}$

Es: $P(\sqrt{2}; 0)$ $\quad \rho P = \sqrt{2}$ $\quad \gamma = 0°$

$Q(2; -2)$ $\quad \rho = \sqrt{4 + 4} = \sqrt{8}$ $\quad \begin{cases} 2 = \sqrt{8}\cos\beta \\ -2 = \sqrt{8}\sin\beta \end{cases}$ $\Rightarrow \beta = -\pi/4$

$R(3; 2/3\pi)$



$\begin{cases} x_R = 3(-1/2) = -3/2 \\ y_R = 3(\sqrt{3}/2) = 3\sqrt{3}/2 \end{cases}$

NUMERI

numeri naturali $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$

numeri interi $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$

numeri razionali $\mathbb{Q} = \{a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 : a/b\}$

numeri reali $\mathbb{R} = \{$numeri con la virgola$\}$

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

MASTER COPY
Tel. 030 9912126
Cell. 348 9837745

- numeri con un numero finito di cifre dopo la virgola $(3,13)$
- numeri con un numero finito di cifre dopo la virgola ma periodiche $(2,3\overline{75})$
- numeri con un numero infinito di cifre non periodico $(\sqrt{2})$

queste due tipologie di numeri possono anche essere scritte come frazione tra due numeri interi:

$1,7 = 17/10$ $\qquad$ $3,13 = 313/100$

$100x = 241,\overline{43}$
$x = 2,\overline{43} = 2,4343\dots =$
$99x = 241$ $\Rightarrow$ $x = 241/99$

$\Rightarrow \mathbb{Q} = \{x \in \mathbb{R} : x$ ha n° finito di cifre dopo la virgola o x è periodico$\}$

Un **CAMPO** è il dato di un insieme K e di due operazioni (addizione e moltiplicazione)

regola che associa ad una coppia di numeri un altro numero $\forall a, b \in K$ è definita $a+b$, $a \cdot b$

In un campo ci sono due elementi distinti e particolari $[0; 1]$
Queste due operazioni e questi due elementi verificano alcune proprietà:

- proprietà commutativa
  $\forall a, b \in K$ vale $a+b = b+a$
  $a \cdot b = b \cdot a$
- proprietà associativa
  $\forall a, b, c \in K$ vale $(a+b)+c = a+(b+c)$
  $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
- proprietà dell'elemento neutro
  $\forall a \in K$ vale $0 + a = a$
  $1 \cdot a = a$
- esistenza dell'opposto e reciproco
  $\forall a \in K, \exists b \in K : a+b = 0$ ← opposto di a è $-a$
  $\forall a \in K, a \neq 0, \exists b \in K : a \cdot b = 1$ ← reciproco o inverso di a è $1/a$ o a^{-1}
- proprietà distributiva
  $\forall a, b, c \in K$ vale $a \cdot (b+c) = ab + bc$

MASTER COPY
Tel. 050 8812126
Cell. 333 2937745

I numeri complessi $\mathbb{C}$ sono un insieme maggiore di quello di $\mathbb{R}$ e sono stati introdotti per risolvere equazioni come $x^2 = -1$.
L'insieme che si considera è $\mathbb{R}^2$ (insieme delle coppie a, b : $a, b \in \mathbb{R}$).
Si deve definire somma e prodotto:

- $(a; b) + (c; d) = (a+c; b+d)$
- $(a; b) \cdot (c; d) = (ac - bd; ad + bc)$

Gli elementi neutri della somma e del prodotto sono $0_{\mathbb{C}} = (0; 0)$
$1_{\mathbb{C}} = (1; 0)$

Teorema: l'insieme $\mathbb{C}$ con somma, prodotto, 0 e 1 appena definiti è un campo, pertanto verifica le proprietà sopra elencate.

Esempio:

- $(z \cdot w) \cdot v = z \cdot (w \cdot v)$ $\quad \forall z, w, v \in \mathbb{C}$

$z = (a; b)$ $\quad a, b \in \mathbb{R}$
$w = (c; d)$ $\quad c, d \in \mathbb{R}$
$v = (e; f)$ $\quad e, f \in \mathbb{R}$

$z \cdot w = (a; b) \cdot (c; d) = (ac - bd; ad + bc)$

$(z \cdot w) \cdot v = (ac - bd; ad + bc) \cdot (e; f) =$
$= [(ac - bd)e - (ad + bc)f ; (ad + bc)e + (ac - bd)f]$
$= (ace - bde - adf - bcf ; ade + bce + acf - bdf)$

$w \cdot v = (c; d) \cdot (e; f) = (ce - df ; cf + de)$

$z \cdot (w \cdot v) = (a; b) \cdot (ce - df ; cf + de) =$
$= [(ce - df)a - (cf + de)b ; b(ce - df) + a(cf + de)] =$
$= (ace - adf - bcf - bde ; bce - bdf + acf + ade)$

- $1_{\mathbb{C}} \cdot z = z$ $\quad z = (a, b)$ $\quad a, b \in \mathbb{R}$

$(1; 0) \cdot (a; b) = (1a - 0b ; 1b + 0a) = (a; b) = z$

Dimostrazione che in $\mathbb{C}$ $x^2 = -1$:

$i = (0;1)$

$i^2 = i\,i = (0;1)\cdot(0;1) = (0\cdot 0 - 1\cdot 1;\ 0\cdot 1 + 1\cdot 0) = (-1;0) = -(1;0) = -1$

Sia $\mathbb{R}$ un sottoinsieme di $\mathbb{C}$ — $\mathbb{R} \subset \mathbb{C} : \mathbb{R} = \{(x;0) : x \in \mathbb{R}\}$

questa biezione, oltre a mandare un elemento di un insieme nell'altro insieme e viceversa, mantiene somma e prodotto | si fa corrispondere ad ogni elemento di $\mathbb{R}$ un elemento di $\mathbb{C}$ che però abbia come secondo numero lo 0

$\mathbb{R}$	$\longleftrightarrow$	$\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$
x, y		$(x;0), (y;0)$
$x+y$		$(x;0) + (y;0) = (x+y;0)$
$x \cdot y$		$(x;0)\cdot(y;0) = (xy - x0;\ x0 + 0y) = (x\cdot y;0)$

Ogni numero complesso si scrive $x + iy$ con $x, y \in \mathbb{R}$

$(x;y) = x + iy$ — x: parte reale, iy: parte immaginaria

$x + iy = (x;0) + (0;1)(y;0)$
$= (x;0) + (0\cdot y - 0;\ 0\cdot 0 + 1\cdot y) = (x;0) + (0;y)$
$= (x;y)$

Esempio: $(1+3i)(-1+i) = 1(-1) + 1i - 3i + 3i^2 = -1 - 2i + 3i^2 = -4 - 2i$

$$\frac{1}{1+2i} = \frac{1}{(1+2i)}\frac{(1-2i)}{(1-2i)} = \frac{1-2i}{1\cdot 1 - 4i^2} = \frac{1}{5} - \frac{2}{5}i$$

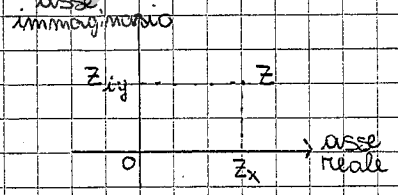
in forma generica:

$z, w : z = a + bi,\ w = c + di \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}$

$z \cdot w = (a+bi)(c+di) = ac + adi + bci + bdi^2 = ac - bd + i(ad + bc)$

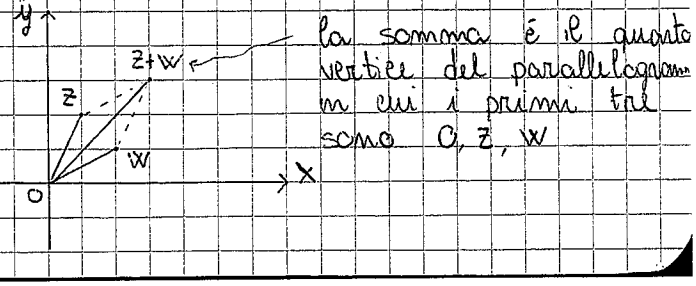
RAPPRESENTAZIONE GEOMETRICA: gli elementi di $\mathbb{C}$ si possono rappresentare come punti del piano cartesiano

$z = x + iy = (x;y)$



Con la rappresentazione geometrica si può esprimere anche con la rappresentazione geometrica con la regola del parallelogramma.
Esempio:

$z = 1 + 2i$
$w = 2 + i$
$z + w = 3 + 3i$



la somma è il quarto vertice del parallelogramma in cui i primi tre sono 0, z, w