29-9-16

CALCOLO NUMERICO

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

Prove orale con eventuale scritto da me

RICEVIMENTO: su appuntamento cecilia.magherini@unipi.it (MAR-MER)
Primo studio nell'ex dipartimento mat. applicata Via Filippo Buonarroti 1/C

E-learning

TESTI: libreria Pellegrini, Via Curtatone e Montanara
+ Dispense Gheradoni per alcuni argomenti.

Appelli: 4 UFFICIALI + 1 APRILE + 1 NOVEMBRE

Il CALCOLO NUMERICO è un settore della matematica che si occupa di definire e studiare metodi per determinare una approssimazione della soluzione di problemi matematici.

PRINCIPALI PROBLEMI CHE SI RICHIEDONO ad UN METODO NUMERICO

1) Fornire un'approssimazione accurata
2) Avere un buon costo computazionale
3) Facilmente implementabile su un calcolatore.

MISURE DELL'ERRORE

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

Soluzione esatta: $x \in \mathbb{R}$

Soluzione approssimata $\tilde{x} \in \mathbb{R}$

- $\Delta x = \tilde{x} - x$ ERRORE ASSOLUTO

Supponiamo che si riesca a determinare un errore assoluto $10^{-4} \leq \Delta x \leq 10^{-3}$

Conoscendo Δx, posso dire se è grande o piccolo?

Se $x = 10^{8} \rightarrow$ piccolo

Se $x = 10^{-8} \rightarrow$ grande

Conoscendo solo Δx non posso rispondere. Allora si usa:

- $\varepsilon_x = \frac{\Delta x}{x} = \frac{\tilde{x} - x}{x}$ ERRORE RELATIVO $(x \neq 0)$

$$\Rightarrow \frac{\tilde{x}}{x} = 1 + \varepsilon_x$$

Tanto più ε_x mi fa allontanare da 1, tanto più grande sarà l'errore, perché se $\frac{\tilde{x}}{x} = 1$ vuol dire che $\Delta x = 0$. Dunque il termine di paragone è 1 per sapere se ε_x è grande o piccolo.

$\varepsilon_x = 10^{-3} \rightarrow$ piccolo

$= 0{,}1\%$

$\varepsilon_x = 0.9 = 90\%$ SONO LONTANO DALLA SOLUZIONE ESATTA DEL PROBLEMA.

CLASSE DI UN ERRORE ASSOLUTO o RELATIVO

TIPOLOGIE DI ERRORE:

1) ERRORI DI DISCRETIZZAZIONE O TRONCAMENTO

Sono errori legati alla definizione del calcolo numerico, cioè del metodo.

Problema esatto	⟹	Problema discreto	LA FUNZIONE NON SARÀ PIÙ DERIVABILE SU OGNI INTORNO
Dominio continuo		Dominio discreto	

Possiamo sostituire il problema esatto con uno discreto, definito su un dominio discreto, perché un calcolatore non può lavorare su un dominio continuo. È proprio in questo passaggio che si compie questa tipologia di errore.

ESEMPIO: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad x_0 \in \mathbb{R}$ $\quad f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$

sulla regolare

Questa operazione limite non su un dominio continuo, su uno discreto non lo posso fare. Prendo un intorno $\bar{h} \neq 0$ $|\bar{h}|$ piccolo

Quindi non studio il rapporto incrementale su tutti gli intorni, ma solo su uno particolare ($\bar{h}$) NON PIÙ INFINITESIMO, MA PICCOLO E DISCRETO

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0+\bar{h})-f(x_0)}{\bar{h}} = \varphi_{\bar{h}}(x_0)$$

$$f(x_0+\bar{h}) = f(x_0) + f'(x_0)\bar{h} + \frac{1}{2}f''(\xi)\bar{h}^2 := \left(\frac{1}{2}f''(x_0)\bar{h}^2 + o\left(\bar{h}^2\right)\right)$$

{ compreso tra x_0 e $x_0+\bar{h}$ $\quad \bar{h} = x_0+\bar{h}-x_0$

$$\underbrace{\varphi_{\bar{h}}(x_0) - f'(x_0)}_{\text{ERRORE}} = \frac{1}{2}f''(\xi)\bar{h} = O(\bar{h})$$ (così si comportano allo stesso modo)

$$g(\bar{h}) = O(\bar{h}) \quad \left|\frac{g(\bar{h})}{\bar{h}}\right| \leq C$$

Sono errori che nascono dall'aver troncato lo sviluppo di Taylor

2) ERRORI DI CONVERGENZA

Sono errori causati dall'utilizzo del metodo iterativo.

$\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ $\quad \lim_{n \to +\infty} x_n = x^*$ soluzione esatta del problema

Supponiamo di fermarci ad un N, dunque x_N Allora:

$x_N - x^*$ ERRORE ASSOLUTO DI CONVERGENZA

ESEMPIO: $x_0 = 2$

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right) \qquad n = 0, 1, \dots$$

$x_0 = 2 \qquad x_1 = \frac{1}{2}\left(2 + \frac{2}{2}\right) = \frac{3}{2}$

$x_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2} + \frac{4}{3}\right) = \dots$

$\lim_{n \to \infty} x_n = \sqrt{2}$ (lo vedremo a suo tempo)

Devo stabilire un indice di arresto, e quale x_n fermarmi. L'errore di convergenza dipende dall'n a cui mi fermo.

Se questo metodo numerico, mi ha che $x_4 - \sqrt{2} \approx 10^{-12}$

Dunque posso accontentarmi di un indice di arresto pari 4.

3) ERRORI DI ROUND OFF

Dovuti all'utilizzo di un calcolatore elettronico

Nel rappresentare i numeri, un calcolatore commette errori.

- ERRORI DI RAPPRESENTAZIONE → NUMERI INTERI
  → NUMERI REALI (RAZIONALI + IRRAZIONALI)
- ERRORI INTRODOTTI DURANTE IL CALCOLO

→ NUMERI NATURALI

- Sistema posizionale in base $b = 10$: 10 simboli diversi che sono i primi 10 numeri naturali $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$.

Per esprimere numeri > 9 dobbiamo usare un sistema posizionale di N cifre. $\underbrace{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_N}$ $\alpha_i \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$ $i = 1, \dots, N$.

↓ a cui associamo un numero naturale

$$n = \alpha_1 \cdot 10^{N-1} + \alpha_2 \cdot 10^{N-2} + \dots + \alpha_N \cdot 10^0$$

$818 \leftrightarrow n = 8 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10^1 + 8 \cdot 10^0$

$\alpha_1 = \alpha_3 = 8$

$\alpha_2 = 1$

Sistema posizionale perché ogni simbolo assume un valore in base alla posizione che occupa.

N cifre $\Rightarrow$ rappresentare in maniera esatta i naturali dell'insieme $\{0, 1, \dots, 10^N - 1\}$

$N = 3 \quad 10^3 - 1 = 999$

- Sistema posizionale di base $b \in \mathbb{N}$, $b \geq 2$

$0, 1, \dots, b-1 \longleftrightarrow$ equipaesiamo ai primi b naturali

$b = 2 \quad 0, 1$

$a_1\ a_2 \dots a_N \longleftrightarrow n = a_1 \cdot b^{N-1} + a_2 \cdot b^{N-2} + \dots + a_N \cdot b^0$

$a_i \in \{0, 1, \dots, b-1\} \qquad \{0, 1, \dots, b^N - 1\}$

Naturali rappresentabili con N cifre. Posso rappresentare solo alcuni naturali ma commettendo poco errore.

→ NUMERI INTERI

1) Rappresentazione "tipo" complemento a due

$\underbrace{a_0\ a_1\ a_2 \dots a_N}$ (STRINGA) $\quad a_i \in \{0, 1, \dots, b-1\}\ i = 1, \dots N$

$a_0 \in \{+, -\}$

$\updownarrow$

$n = a_0 (a_1 \cdot b^{N-1} + a_2 \cdot b^{N-2} + \dots + a_N \cdot b^0)$

MA NON si procede così. Perché per $n = 0$, sarebbe rappresentato due volte ± 0.

$\underbrace{a_0\ a_1\ a_2 \dots a_N}$

$\rightarrow \begin{cases} a_1 \cdot b^{N-1} + a_2 \cdot b^{N-2} + \dots + a_N \cdot b^0 & \text{se } a_0 = + \\ \left(a_1 \cdot b^{N-1} + a_2 \cdot b^{N-2} + \dots + a_N \cdot b^0\right) - b^N & \text{se } a_0 = - \end{cases}$

$0 \leq n \leq b^N - 1 \longrightarrow$ se $a_0 = +$

$-b^N \leq n \leq -1 \longrightarrow$ se $a_0 = -$

Con questo tipo di rappresentazione riusciamo a rappresentare tutti i numeri $\{-b^N, \dots, -1, 0, 1, \dots, b^N - 1\}$

2) Rappresentazione con shift

Fisso un parametro $J \in \mathbb{N} \longrightarrow$ detto Shift

$a_1\ a_2 \dots a_N$ (Sequenza) $\quad a_i \in \{0, 1, \dots b-1\}\ i = 1, \dots N$

$\updownarrow$ a cui associo

$n = (a_1 \cdot b^{N-1} + \dots + a_N \cdot b^0) - J$

I numeri che posso rappresentare senza errore:

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

$$\{-\nu, -\nu+1, \dots, b^N - 1 - \nu\}$$

→ NUMERI REALI

Noi rappresenteremo solo un sottoinsieme dei razionali.

- Lavoriamo alla base 10 : $b=10$

$x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$

$x = \beta \cdot 10^m$ $\quad m$ (ETÀ) = ESPONENTE $\quad m \in \mathbb{Z}$ (INTERO)

β (REALE) = MANTISSA $\quad |\beta| \in [1, 10)$ ← escluso

Esempio : $x = 78,54 = 7,854 \cdot 10^1 \quad \beta = 7,854 \quad m = 1$

$\boxed{x = \beta \cdot 10^m}$ NOTAZIONE SCIENTIFICA (O IN VIRGOLA MOBILE) NORMALIZZATA → Vincolo $|\beta| \in \boxed{[1, 10)}$

$7,854 = 7 \cdot 10^0 + 8 \cdot 10^{-1} + 5 \cdot 10^{-2} + 4 \cdot 10^{-3}$

- Base $b \in \mathbb{N}$, $b \geq 2$

Se $x \neq 0 \quad x = \beta \cdot b^m \quad |\beta| \in [1, b)$

$m \in \mathbb{Z}$

Utilizzeremo sequenze: $\alpha_0 \alpha_1 \dots \alpha_n \quad \beta_1 \beta_2 \dots \beta_s$

$\alpha_0 \in \{+, -\} \quad \alpha_i, \beta_j \in \{0, 1, \dots, b-1\} \quad i = 1, \dots, n \quad j = 1, \dots, s$

$\alpha_0 \alpha_1 \dots \alpha_n \quad \beta_1 \beta_2 \dots \beta_s \quad \alpha_1 \neq 0$

↕ A UNA SEQUENZA DI NUMERI REALI SI ASSOCIA:

$x = \beta \cdot b^m$ con

$\beta = \alpha_0 (\alpha_1 \cdot b^0 + \alpha_2 \cdot b^{-1} + \dots + \alpha_n \cdot b^{1-n}) = \beta(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n)$

$m = (\beta_1 b^{s-1} + \beta_2 b^{s-2} + \dots + \beta_s \cdot b^0) - \nu = \nu \text{ sfist} = m(\beta_1, \beta_2, \beta_s)$

INSIEME DEI NUMERI MACCHINA

$M = \{0\} \cup \{x = \beta \cdot b^m$ con $\beta = \beta(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$

$m = m(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s)\}$

Proprietà dei numeri macchina

1) Cardinalità $(M) < +\infty$

2) $1 \leq |\beta| \leq b(1 - b^{-n}) \overset{n \geq 1}{<} b \quad n \geq 1$

3) $m \in [-\nu, b^s - \nu - 1] \cap \mathbb{Z}$

4) Se $x \in M \setminus \{0\}$ allora $b^{-\nu} \leq |x| \leq (1 - b^{-n}) b^{\varphi} \quad \varphi = b^s - \nu$

MUSIDI COPISTERIA 388/9527745