Richiami di Algebra Lineare

o fatti a lezione

o <u>Matrice dei coefficienti</u>

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times n}$$

o <u>vettore dei termini noti</u> e delle <u>incognite</u>

$$\underline{b} = (b_i) = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m \qquad \underline{x} = (x_j) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

Sistema lineare $\boxed{A\underline{x} = \underline{b}}$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

- trasposta $A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{m1} \\ \vdots & \ddots & \\ a_{1n} & & a_{mn} \end{pmatrix}$
- range di A = $ran(A) \equiv \{ \underline{y} \in \mathbb{C}^m \mid \exists x \in \mathbb{C}^n$ t.c. $\underline{y} = A\underline{x} \}$
- rango di A $rank(A) \equiv dim(ran(A)) = dim(Im(A)) = rang(A)$
- non singolare: A è non singolare se è quadrata e ha rango massimo → $rank(A) = n$ o $dim(Ker) = 0$

  $rank(A) = rank(A^T)$

o $rank(A) + dim(null(A)) = n \qquad A \in \mathbb{R}^{n\times n}$

$null(A) = Ker(A) \qquad rank(A) \leq min(m,n)$

- spazio nullo $= Ker(A) \equiv \{ \underline{x} \in \mathbb{C}^n \mid A\underline{x} = \underline{0}_n \}$
- matrice simmetrica se $A = A^T$
- matrice antisimmetrica se $A = -A^T$
- matrice definita positiva se $x^T A x > 0 \quad \forall x \neq 0$
- matrice semidefinita positiva se $x^T A x \geq 0 \quad \forall x \neq 0$
- matrice diagonale se $a_{ij} = 0 \quad \forall i \neq j \Rightarrow A = \begin{pmatrix} a_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn} \end{pmatrix}$
- Immagine $Im(A) = span\{ \underline{a}_1, \underline{a}_2, \ldots, \underline{a}_n \} \subset \mathbb{C}^m$
- matrice invertibile $\Leftrightarrow \exists\, C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ t.c. $AC = CA = I_n \quad (C = A^{-1})$
- A non singolare $\Leftrightarrow A$ è invertibile $\Leftrightarrow det(A) \neq 0$
- matrice ortogonale se $A^{-1} = A^T$
- matrice diagonalizzabile $\Leftrightarrow \exists\, V$ invertibile t.c. $A = V \Lambda V^{-1}$, Λ diagonale

Proprietà di matrici

- associativa $(F \cdot G) \cdot H = F \cdot (G \cdot H)$
- distributiva $(F+G) \cdot H = F \cdot H + G \cdot H$
- trasposta $(F \cdot G)^T = G^T \cdot F^T$

Teorema

Se $F \in \mathbb{R}^{m \times m}$ è non singolare $\Rightarrow \exists!$ la matrice F^{-1} tale che
$$F \cdot F^{-1} = F^{-1} \cdot F = I_m$$

Def DETERMINANTE

$$\det(F) = \begin{cases} f_{11} & \text{se } n=1 \\ \sum_{i=1}^{n} (-1)^{1+i} f_{i1} \det(F_{i1}) & \text{se } n>1 \end{cases}$$

Proprietà determinante

- $\det(F \cdot G) = \det(F)\det(G)$
- $\det(F^T) = \det(F)$
- $\det(\alpha F) = \alpha^n \det(F) \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$
- Se F è una triang. inf o sup allora $\det(F) = \prod_{i=1}^{n} f_{ii}$
- Se F è non singolare $\Leftrightarrow \det(F) \neq 0$

Def AUTOVALORE

$\lambda \in \mathbb{C}$ è un autovalore di $F \in \mathbb{R}^{n \times n}$ se $\exists\, x \in \mathbb{C}^n,\ x \neq 0_n$ detto autovettore tale che $(F - \lambda I)\underline{x} = 0_n$

λ è autovalore di $F \Leftrightarrow p(\lambda) = 0$

dove $p(\lambda) \equiv \det(F - \lambda I)$ è detto polinomio caratteristico

Lo spettro di una matrice F è l'insieme dei suoi autovalori
$$\sigma(F) = \{\lambda \in \mathbb{C} \text{ t.c. } \lambda \text{ è autovalore di } F\}$$

Il raggio spettrale è il massimo modulo dei suoi autovalori
$$\rho(F) = \max_{\lambda \in \sigma(F)} |\lambda|$$

Teo della dimensione

$\text{rang}(A) + \dim(\text{Ker}(A)) = n$

(1) Il sistema lineare $\underset{m}{A}\,\underline{x} = \underline{b}$ ammette soluzione $\Leftrightarrow \underline{b} \in \text{Im}$

(2) Se la sol esiste $\Rightarrow$ è unica $\Leftrightarrow \text{Ker}(A) = \{\underline{0}_n\}$

Capitolo 1: errori e aritmetica finita

Criteri per la valutazione di un metodo numerico: 27/09

1) accuratezza dell'approssimazione
2) costi computazionali
3) facilità di implementazione

Misure dell'errore: (x sol esatta, $\hat{x}$ è quella approssimata)

(1) Errore assoluto $\Delta x = \hat{x} - x$

(2) Errore relativo $\varepsilon_x = \dfrac{\Delta x}{x} = \dfrac{\hat{x}}{x} - 1 \rightarrow \hat{x} = x(1+\varepsilon_x)$

Tipologie di errore

(1) errori di discretizzazione o di troncamento:

errori dovuti alla definizione del metodo numerico.
Il problema matematico viene definito esatto e sul continuo.
Il metodo numerico lo risolve ma approssimandolo in un dominio discreto. Nel farlo porta con sé un errore di discretizzazione

Esempio: calcolare $f'(x_0)$ cioè $\lim_{h\to 0} \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$

irrisolvibile poiché definito sul continuo, uso un metodo numerico

$\bar{h} \neq 0$ $\bar{h} \simeq 0$ $\varphi(x_0, \bar{h}) = \dfrac{f(x_0+\bar{h}) - f(x_0)}{\bar{h}}$

$$\Delta x = \frac{f(x_0+\bar{h}) - f(x_0)}{\bar{h}} - f'(x_0)$$

Uso Taylor con resto di Peano:

$f(x_0+\bar{h}) = f(x_0) + \bar{h} f'(x_0) + \bar{h}^2 \frac{1}{2} f''(\xi)$ $f \in C^2(x_0-\delta; x_0+\delta)$

$$\Rightarrow \Delta x = \frac{\cancel{f(x_0)} + \bar{h} f'(x_0) + \bar{h}^2 \frac{1}{2} f''(\xi) - \cancel{f(x_0)}}{\bar{h}} - f'(x_0)$$

$= \bar{h} \frac{1}{2} f''(\xi)$ è l'errore assoluto commesso (di troncamento) dovuto all'utilizzo del metodo numerico

(2) errori di convergenza

Spesso i metodi numerici sono di tipo iterativo, cioè non dà direttamente la soluzione esatta x^* ma genera piuttosto una successione di risultati intermedi $\{x_n\}$

$x_{n+1} = \Phi(x_n)$ $n = 0, 1, \ldots$ dove Φ è la funzione di iterazione e x_0 è l'approssimazione iniziale

Il metodo è convergente se $\boxed{\lim_{n\to\infty} x_n = x^*}$

Ma poiché si possono eseguire solo un numero finito di iterazioni otteniamo un errore assoluto di convergenza pari a

$x_N - x^*$ dopo aver fermato il metodo a $n = N-1$

(3) errori di ROUND-OFF

errori dovuti all'utilizzo di un calcolatore che utilizza aritmetica finita. I numeri infiniti (π, e, $\sqrt{2}$, ...) possono essere rappresentati solo in modo approssimato dando luogo ad un errore di rappresentazione

Noi usiamo un sistema posizionale in base 10 $b=10$ $\{0,1,\dots,9\}$

N = n° cifre $\alpha_1, \dots, \alpha_N$ $\alpha_i \in \{0,1,\dots,9\}$

$n = \alpha_1 10^{N-1} + \alpha_2 10^{N-2} + \dots + \alpha_N 10^0$

Se si cambia base $b \in \mathbb{N}$ $b>1$ $\{0,1,\dots,b-1\}$

$n = \alpha_1 b^{N-1} + \alpha_2 b^{N-2} + \dots + \alpha_N b^0$

Se $b=2$ si usa una rappresentazione binaria $\{0,1\}$

(3.1) rappresentazione NUMERI INTERI

Il computer memorizza la stringa $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_N$

$b \in \mathbb{N}$ $b>1$ $\{0,1,\dots,b-1\}$ $\alpha_1, \dots, \alpha_N \in \{0,1,\dots,b-1\}$

$\alpha_0 \in \{+,-\}$

$$n = \begin{cases} \sum_{i=1}^{N} \alpha_i b^{N-i} & \text{se } \alpha_0 = + \\ \sum_{i=1}^{N} \alpha_i b^{N-i} - b^N & \text{se } \alpha_0 = - \end{cases}$$

Così si rappresentano senza errori tutti i numeri

$\{-b^N, \dots, b^N - 1\}$

(3.1.1) con shift

Si chiama $\nu \in \mathbb{N}$ shift

$z = \alpha_1 b^{N-1} + \dots + \alpha_N b^0 - \nu \in \{-\nu, \dots, b^N - 1 - \nu\}$

(3.2) rappresentazione NUMERI REALI

$x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ $x = \rho b^\eta$ ρ = mantissa $|\rho| \in [1,b)$

η = esponente $\eta \in \mathbb{Z}$

$\rho = \rho(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m)$ m = cifre mantissa

$\eta = \eta(\beta_1, \dots, \beta_s)$ s = cifre esponente

$\rho = \alpha_0(\alpha_1 b^0 + \alpha_2 b^{-1} + \dots + \alpha_m b^{1-m})$

$\eta = \beta_1 b^{s-1} + \dots + \beta_s b^0 - \nu$ $\nu \in \mathbb{N}$

Def

Si definisce l'insieme dei numeri macchina

$$M = \{0\} \cup \{\rho b^{\eta} \text{ con } \begin{matrix} \rho = \rho(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m) \\ \eta = \eta(\beta_{\cancel{1}}, \dots, \beta_s) \end{matrix}\}$$

Proprietà di M

(1) M è un insieme finito ($card(M) < +\infty$)

(2) Se $x = \rho b^{\eta} \in M \setminus \{0\}$ allora $|\rho| \in [1, b(1-b^{-m})] \subset [1, b]$

e $\eta \in [-\nu, b^s - \nu - 1] \cap \mathbb{Z}$

Dim

$|\rho| = \alpha_1 b^0 + \alpha_2 b^{-1} + \dots + \alpha_m b^{1-m} \quad \alpha_i \in \{0, \dots, b-1\} \ i = 1, \dots, m$

$|\rho| \geq 1 b^0 + 0 b^{-1} + \dots + 0 b^{1-m} = 1 \quad \alpha_1 \neq 0$

Esempio per $m = 3$

$|\rho| = \alpha_1 b^0 + \alpha_2 b^{-1} + \alpha_3 b^{-2} \leq (b-1) b^0 + (b-1) b^{-1} + (b-1) b^{-2}$

$= b \cancel{-1} \cancel{+1} \cancel{-b^{-1}} \cancel{+b^{-1}} - b^{-2} = b - b^{-2} = b(1 - b^{-3}) = b(1 - b^{-m})$

(3) Se $x \in M \setminus \{0\}$ allora $|x| \in [r_{min}, r_{MAX}]$

$r_{min} = b^{-\nu}$

$r_{MAX} = b(1 - b^{-m}) b^{b^s - \nu - 1} = (1 - b^{-m}) b^{\varphi} \quad$ dove $\varphi = b^s - \nu$

Si sceglie ν in modo che $r_{MAX} \approx \frac{1}{r_{MIN}} = b^{\nu} \quad r_{MAX} \approx b^{\varphi}$

$\Rightarrow \nu \approx \varphi = b^s - \nu \Rightarrow$ se b è pari $\nu \approx \frac{b^s}{2}$

$$\boxed{M \subset I = [-r_{MAX}, -r_{MIN}] \cup \{0\} \cup [r_{MIN}, r_{MAX}]}$$

Ma I ha un numero infinito di elementi mentre M ne ha un numero fininito

Quindi definisco floating-point $fl : I \to M \qquad fl(0) = 0$

$x \to fl(x) \qquad fl(x) = -fl(-x)$

che associa un numero reale $x \in I$ ad un numero macchina $fl(x)$ dalla mantissa finita portando con se un errore di approssimazione

$\rho = \alpha_0 (\alpha_1 b^0 + \alpha_2 b^{-1} + \dots + \alpha_m b^{1-m} + \alpha_{m+1} b^{-m} + \dots)$

↳ mantissa infinita $\qquad \eta \in [-\nu, \varphi - 1] \cap \mathbb{Z}$ è un numero esatto

$fl(x) = \hat{\rho} b^{\eta} \qquad \hat{\rho}$ = mantissa approssimata

(1) rappresentazione con troncamento

$\hat{\rho} = \alpha_1 b^0 + \dots + \alpha_m b^{1-m}$

(2) rappresentazione con arrotondamento

$\hat{\rho} = \alpha_1 b^0 + \dots + \alpha_{m-1} b^{2-m} + \hat{\alpha}_m b^{1-m}$

$$\hat{\alpha}_m = \begin{cases} \alpha_m & \text{se } \alpha_{m+1} < \frac{b}{2} \\ 1 + \alpha_m & \text{se } \alpha_{m+1} \geq \frac{b}{2} \end{cases}$$