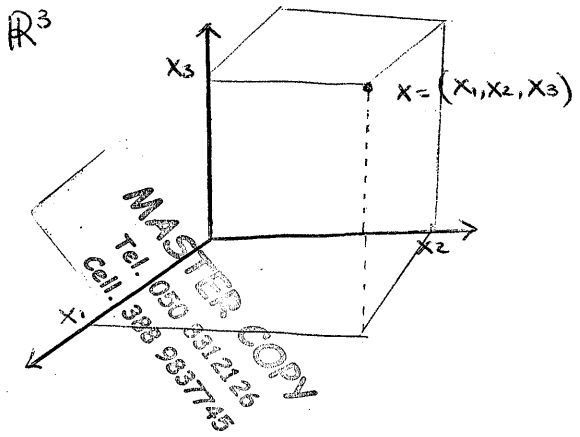
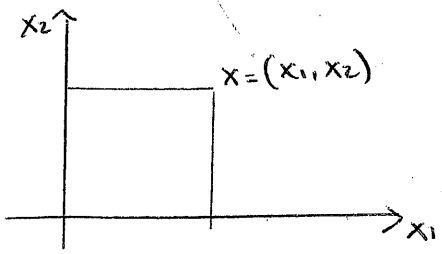
ANALISI II

25/09/2014

Analisi nello spazio euclideo a più dimensioni





MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

In generale:

$$\mathbb{R}^m = \{(x_1, \dots x_m) \mid x_1, \dots x_m \in \mathbb{R}\} \qquad m \in \mathbb{N}^+$$

Proprietà vettori

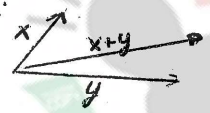
$$\underline{x} + \underline{y} = (x_1 + y_1, \dots x_m + y_m)$$

$$\lambda \underline{x} = (\lambda x_1 \dots, \lambda x_m) \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

Lunghezza:

- $m = 2$



teorema del parallelogramma

$|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ teorema di pitagora

- $m = 3$ $\quad |x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$

La norma è la lunghezza di un vettore
↓
norma euclidea

In generale la NORMA DI UN VETTORE è in $\mathbb{R}^m$

$$|x| = \sqrt{x_1^2 + \dots x_m^2} \qquad x \in \mathbb{R}^m$$

- Se moltiplico uno scalare per un vettore e faccio la sua norma:

$\lambda \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^m$

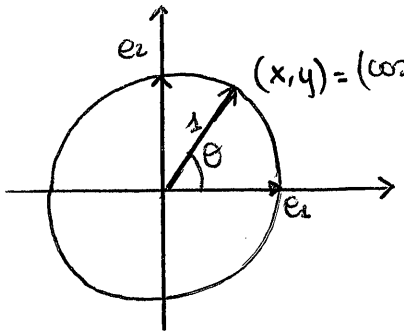
$|\lambda x| = |\lambda| \cdot |x|$

Base canonica in $\mathbb{R}^m$: $(e_1, \dots e_m)$

$e_1 = (1, 0 \dots 0)$

$e_2 = (0, 1 \dots 0)$

$e_m = (0, \dots 0, 1)$



$e_1=(1,0)$
$e_2=(0,1)$

$x^2+y^2=1$

$x=\cos\theta$
$y=\sin\theta$

$\langle (x,y)\cdot(1,0)\rangle = x = \cos\theta =$

↑ prodotto scalare

MASTER COPY
Tel. 050 831 21 26
Cell. 388 9837745

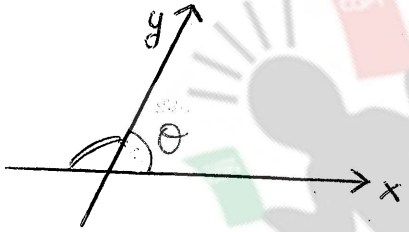
In generale: $\mathbb{R}^3$

$x,y\in\mathbb{R}^n$

Il prodotto scalare è tra 2 vettori:

$$\langle x,y\rangle = x\cdot y = x_1y_1 + x_2y_2 + \dots x_ny_n = \sum_{j=1}^{n} x_j\cdot y_j$$

Tra 2 vettori x e y ho 2 tipi di angoli; quello che mi interessa è l'ANGOLO CONVESSO (minore di 90°)



$\langle x,y\rangle = |x|\cdot|y|\cos\theta$

↓ prodotto scalare da un punto di vista geometrico

Proposizione di Cauchy-Schwarz — mette in relazione prodotto scalare e norma.

$$\langle x,y\rangle \le |x|\cdot|y|$$

Equivalente è fare il modulo del prodotto scalare. $|\langle x,y\rangle| \le |x||y| \quad \forall x,y\in\mathbb{R}^n$

$$\boxed{\sqrt{\langle x,x\rangle} = |x|}$$

Dim:

$$0\le |x-y|^2 = \langle x-y, x-y\rangle = \langle x, x-y\rangle - \langle y, x-y\rangle = |x|^2 - 2\langle x,y\rangle + |y|^2 \ge 0$$

↑ si sfrutta la bilinearità del prodotto scalare

$\langle \cdot, x\rangle$ è lineare

$\langle x, \cdot\rangle$ è lineare

il punto indica un qualsiasi valore

$$\left[\begin{array}{l} l:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R} \text{ lineare} \\ l(x) = a_1x_1 + \dots + a_nx_n = \langle a,x\rangle \quad a\in\mathbb{R}^n \end{array}\right]$$

si continua la dimostrazione:

$$0 \le |x-\lambda y|^2 = \langle x-\lambda y,\ x-\lambda y\rangle = \langle x, x-\lambda\rangle - \langle \lambda y,\ x-\lambda y\rangle$$
$$= |x|^2 - 2\lambda\langle x,y\rangle + \lambda^2|y|^2 \ge 0$$

$$\langle x-\lambda y\rangle = \langle x-\lambda y,\ x-\lambda y\rangle = |x|^2 + \lambda^2|y|^2 - 2\lambda\langle x,y\rangle \ge 0$$

$$\langle x+y,\ x+y\rangle = |x|^2 + |y|^2 + 2\langle x,y\rangle \le |x|^2 + |y^2| + 2|x||y| = (|x|+|y|)^2$$

e così è dimostrata la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz

- $x, y \neq 0$

$$\arccos\left(\frac{\langle x,y\rangle}{|x||y|}\right) = \theta$$

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

Altre proprietà della norma

- $x = (x_1, \dots x_m)$

$$|x_j|^2 \le |x|^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

$$|x_j| \le |x|$$

la matrice presenta la monotonia tra numeri negativi

- $|\underbrace{x}_{A} + \underbrace{y+z}_{B}|$ norma di 3 vettori

Posso applicare la proprietà associativa e la disuguaglianza triangolare e poi di nuovo la disuguaglianza triangolare

$$|x+y+z| \le |x| + |y+z| \le |x| + |y| + |z|$$

DISUGUAGLIANZA TRIANGOLARE (Proposizione)

$$|x+y| \le |x| + |y| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^m$$

Proposizione

$$v_1, \dots v_m \in \mathbb{R}^m$$
$$|v_1 + \dots + v_m| \le \sum_{j=1}^{m} |v_j|$$

Corollario

$x \in \mathbb{R}^m$, $x = (x_1, x_2 \dots x_m)$

$v_1 = x_1 e_1 = (x_1, 0 \dots 0)$

$v_2 = x_2 e_2 = (0, x_2, 0 \dots 0)$

$\vdots$

$v_m = x_m e_m$

$(v_j = x_j e_j)$

$\Rightarrow v_1 + v_2 + \dots v_m = x$

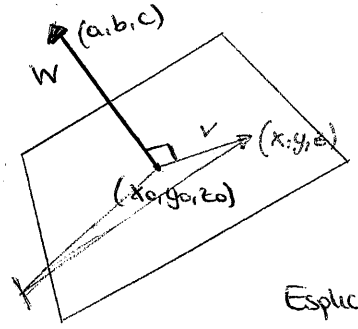
Conclusione:

$$|x| \le \sum_{j=1}^{n} |v_j| = \sum_{j=1}^{n} |x_j|$$

la norma di + vettori è sempre minore della norma dei singoli componenti di esso

$ax+by+cz=d$ (equazione di un piano) con $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$

bisogna dare un significato geometrico a questi coefficienti.



$(x,y,z)-(x_0,y_0,z_0)=v$

$\langle w,(x,y,z)-(x_0,y_0,z_0)\rangle = \langle w,v\rangle = 0$

perché i 2 vettori sono ortogonali, quindi il $\cos\theta=0$ (con $w,v\neq 0$)

Esplicito il prodotto scalare con $w=(a,b,c)$

$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$

$ax+by+cz=\underbrace{ax_0+by_0+cz_0}_{\text{termine noto}}$

Quindi a,b,c hanno un significato geometrico: sono le componenti del vettore perpendicolare al piano (e quindi a v che è un vettore $\in$ al piano)

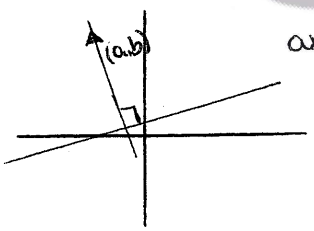
- $\langle x,y\rangle = |x|\cdot|y|\cos\theta = 0$ con $x,y\neq 0$ x e y sono ortogonali $\rightarrow \theta=\frac{\pi}{2}$

- Equazione del piano quando siamo nel piano diventa una retta.
  Se siamo in dimensione $\mathbb{R}^3$ avremo un equazione in $\mathbb{R}^2$ nel caso di un IPERPIANO

In generale: $\mathbb{R}^m$

L'equazione di un iperpiano sarà in $\mathbb{R}^{m-1}$ $\rightarrow \sum_{j=1}^{m} a_j x_j = d$

$a=(a_1,\dots a_m)$



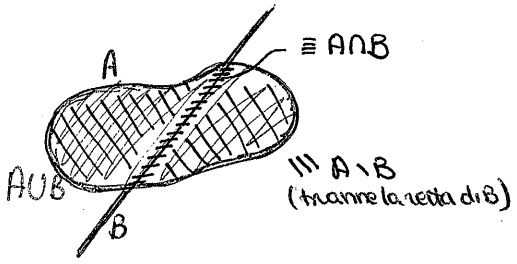
$ax+by=c$

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

INSIEMISTICA

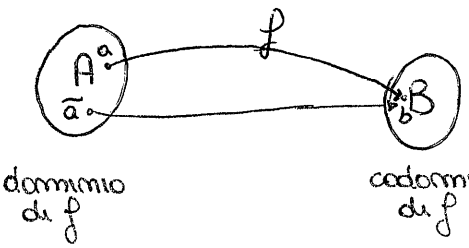
$A,B\subset\mathbb{R}^n$ $m\in\mathbb{N}^+$

- $A\cup B=\{x\in\mathbb{R}^m \mid x\in A$ oppure $x\in B\}$
- $A\cap B=\{x\in\mathbb{R}^m \mid x\in A, x\in B\}$
- $A\setminus B=\{x\in\mathbb{R}^m \mid x\in A, x\notin B\}$ (meno)
- $\mathbb{R}^m\setminus A = A^c$ (complementare di A: tutto ciò che non è A)





La funzione associa al punto a (nel dominio) uno ed un solo punto nel codominio (punto b). Però ad un punto nel codominio possono essere associate più funzioni.



dominio di f — codominio di f

$f: A \to B$

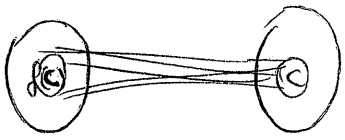
$A \xrightarrow{f} B$

$f: A \to B$

$C \subseteq B$ (contenuto)

$f^{-1}(C) = \{x \in A \mid f(x) \in C\}$ *

(f^{-1}: preimmagine di f)



$\tilde{A} \subseteq A$ $\quad f(\tilde{A}) = \text{Im} f = \{f(a) \in B \mid a \in \tilde{A}\} = \{y \in B \mid \exists a \in \tilde{A},\ y = f(a)\}$

(immagine)

* $C = \{b\}$ $\quad f^{-1}(b) = \{x \in A \mid f(x) = b\}$

Grafico di una funzione = $gr f$

$f: A \to B$

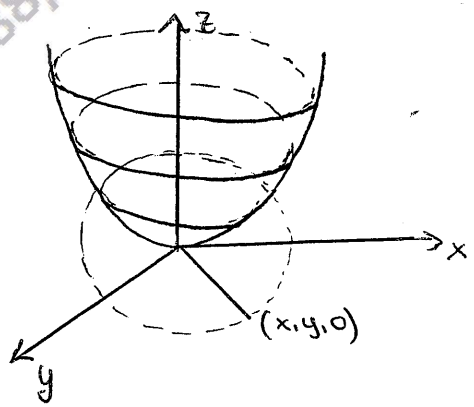
$gr f = \{(a, f(a)) \in A \times B \mid a \in A\}$

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

Esempio: $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$f(x,y) = x^2 + y^2 = |(x,y)|^2$

$gr f = \{(x, y, x^2+y^2) \in \mathbb{R}^3 \mid (x,y) \in \mathbb{R}^2\}$



Se vogliamo considerare il paraboloide "pieno":

$$L = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{array}{l} x^2+y^2 \leq 9 \\ x^2+y^2 \leq z \leq 10 \end{array}\right\}$$

