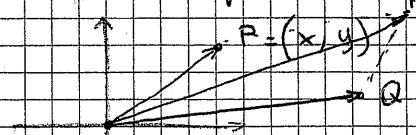
ANALISI II

Venerdì pomeriggio RICEVIMENTO

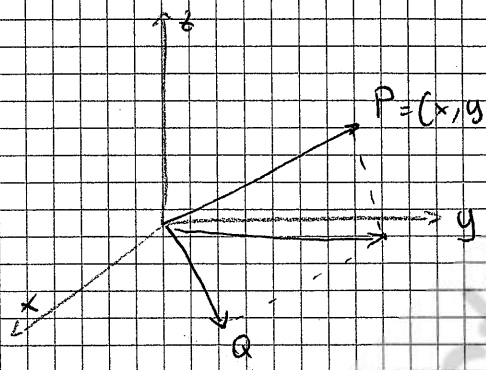
- $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$ campo di lavoro
- $\mathbb{R}^2$



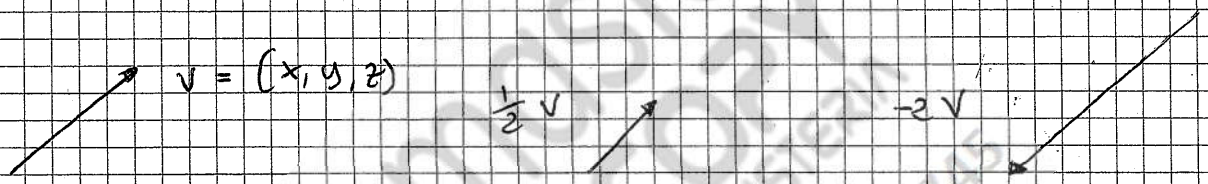
P posso vederlo come – PUNTO
– VETTORE

P + Q = vettore somma

- $\mathbb{R}^3$



MASTER COPY
Tel. 050 831 2126
Cell. 388 9837745



$\mathbb{R}^n$ è uno spazio vettoriale $v, w \in \mathbb{R}^n$

$\lambda, \tilde{\lambda} \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda v + \tilde{\lambda} w \in \mathbb{R}^n$

SCALARI

x vettore! $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ x_1, x_2 ecc COMPONENTI VETTORE

moltiplico per uno scalare $\lambda (x_1, \ldots, x_n) = (x_1 \lambda, \ldots, x_n \lambda)$

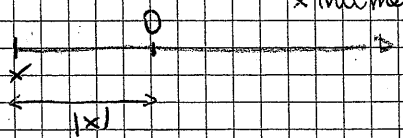
Norma Euclidea: distanza del punto dall'origine

$x \in \mathbb{R}^n$

NORMA DI x $|x| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$

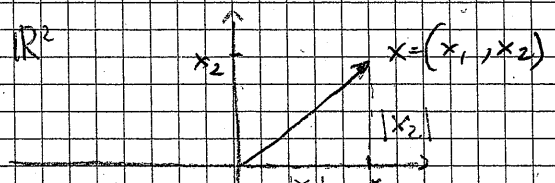
OSS $n = 1$ $|x| = \sqrt{x^2} = |x|$

x numero



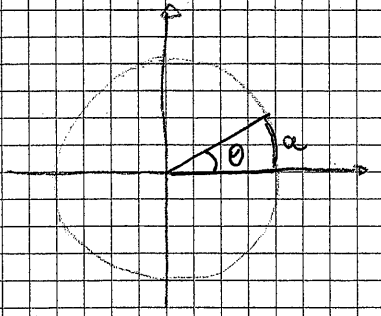
x è un numero

$\mathbb{R}^2$



$dist(x, 0) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$

PITAGORA



$\ell(a) = \theta$
la lunghezza dell'arco "a" è uguale a θ
la lunghezza di mezza circonferenza è π.

PRODOTTO SCALARE

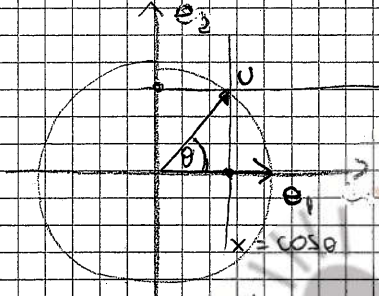
$\mathbb{R}^n \ni x, y$ $\quad x$ e y VETTORI, x_i e y_i le loro coordinate rispetto alle loro canoniche

$$\langle x, y \rangle = \sum_{j=1}^{n} \cdot x_j y_j = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n$$

Se diamo un punto nello spazio, possiamo mettere il sistema di coordinate di riferimento ortonormale, cioè rettangolo. Facciamo due vettori:

INVARIANTE GEOMETRICA, prendendo due vettori in $\mathbb{R}^2$, UNITARI

$|v| = 1 = \sqrt{x^2 + y^2}$ $\quad v = (x, y)$ $\quad e_1 = (1, 0)$



Faccio prodotto scalare tra v e e_1 (VERSORE)

Questo prodotto scalare è invariante se ruoto i due vettori insieme

$\langle v, e_1 \rangle = x = \cos\theta$

INFATTI IL COSENO È LA COORDINATA DEL VERSORE UNITARIO DI ANGOLO θ !

$\mu, d > 0$ $\qquad \langle dv, \mu e_1 \rangle = d\mu \cos\theta = |dv| \cdot |\mu e_1| \cos\theta$

Il prodotto SCALARE di due vettori è il prodotto della loro norma per coseno angolo COMPRESO COMPRESO

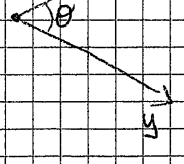
Proprietà NORMA

$|\alpha x| = |\alpha| \cdot |x| \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}^n$

$|x + y| \leq |x| + |y| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$

$|x| = 0 \iff x = 0$

Teorema
Per ogni $x, y \in \mathbb{R}^n$ $\quad \langle x, y \rangle = |x| \cdot |y| \cos\theta$



Significato geometrico del prodotto scalare

Teorema
Per ogni $x, y \in \mathbb{R}^n$ $\quad$ 1) $|\langle x, y \rangle| \leq |x| |y|$

dim $|\langle x, y \rangle| = |(x)|y| \cos\theta| \leq |x| |y|$ $\quad$ $\cos \leq 1$ del vettore

2) $|x + y| \leq |x| + |y|$

$|v| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$ la norma di un vettore è radice del prodotto scalare per se stesso

MASTER COPY
Tel. 050 831226
cell. 388 963745

dim:

$$|x+y| = \sqrt{\langle x+y, x+y\rangle} = \sqrt{\langle x,x\rangle + \langle x,y\rangle + \langle y,x\rangle + \langle y,y\rangle} =$$

$$= \sqrt{|x|^2 + |y|^2 + 2\langle x,y\rangle} \le \sqrt{|x|^2 + |y|^2 + 2|x||y|} = \sqrt{(|x|+|y|)^2} =$$

$$= |x| + |y|$$

per la proprietà commutativa $\langle x,y\rangle = \langle y,x\rangle$

Proprietà del prodotto scalare

1) $\langle x, \alpha y + \mu z\rangle = \alpha\langle x,y\rangle + \mu\langle x,z\rangle$

2) $\langle x,y\rangle = \langle y,x\rangle$

3) $\langle \alpha x + \mu y, z\rangle = \alpha\langle x,y\rangle + \mu\langle y,z\rangle$

4) $|x| = \sqrt{\langle x,x\rangle} \quad \sqrt{\langle x,x\rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i x_i} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} = |x|$

x, y, z vettori di $\mathbb{R}^n$ α, μ numeri reali

esercizio $\langle x, \alpha y + \mu z\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i(\alpha y_i + \mu z_i) = \sum_{i=1}^{n} (\alpha x_i y_i + \mu x_i z_i)$

$$= \alpha \sum_{i=1}^{n} x_i y_i + \mu \sum_{i=1}^{n} x_i z_i = \alpha\langle x,y\rangle + \mu\langle x,z\rangle$$

$\sum$ = SPAN, cioè tutte le combinazioni lineari

Def

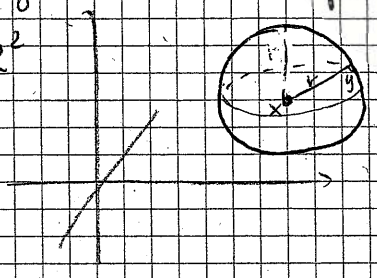
$$B(x,r) = \{ y \in \mathbb{R}^n \mid |y-x| < r \} \quad x \in \mathbb{R}^n,\ r > 0$$

(y: VARIABILE; $\mathbb{R}^n$: INSIEME; $<$: APERTO; SFERA SENZA BUCCIA)

palla con centro x e raggio r

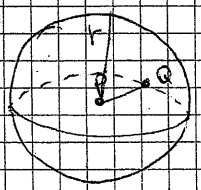
MINORANZA SVELATA SENZA BUCCIA!

Prendendo la distanza tutte tra r e x, la buccia (superficie) della sfera non è compresa. Si parla dell'insieme dei punti y la cui distanza da x è $< r$. Dunque non comprendo la buccia.



x qui è una componente di $\mathbb{R}^3$. Q è la variabile
P centro.
Si parla qui dell'insieme degli Q con certe caratteristiche.

$\mathbb{R}^3$ $|P-Q| < r$ $P(x_0, y_0, z_0)$ $Q(x,y,z)$



$$B(P,r) = \{ Q \in \mathbb{R}^3 \mid |Q-P| < r \} =$$

$$= \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid |(x,y,z) - (x_0 y_0 z_0)| < r \}$$

$$= \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 < r^2 \}$$

se avessi voluto scrivere ≤ l'equazione della sfera in $\mathbb{R}^3$

➡ Posso definire il quadrato!

Diremo un aperto aperto (sfera in questo caso).

MASTER COPY
Tel. 050 831 21 26
Cell. 388 9837745

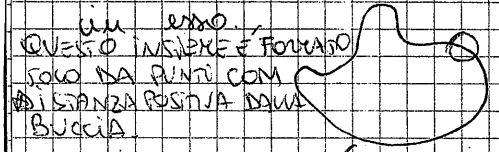
Scrivere equazione della superficie di centro $(1; \sqrt{2}; -3)$ e raggio 2
(Mettere equadiavvo). $(x-1)^2 + (y-\sqrt{2})^2 + (z+3)^2 = 4$ PALLA DI CENTRO d, RAGGIO R

Def. $A \in \mathbb{R}^n$ è aperto se $\forall d \in A \ \exists r > 0$ tale che $B(d,r) \subset A$

A APERTO. Un aperto: insieme senza bucce "FRONTIERE".

- $n=2$ $\mathbb{R}^2$

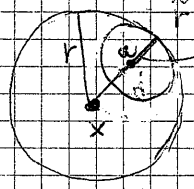
Si sta parlando di un insieme senza bucce, solo di punti contenuti in esso.



Un aperto non può avere le bucce, altrimenti posso prendere una palla, fissarla (centrata nella bucca) e non vale la definizione.

Esercizio $B(x,r)$ è aperto (è un aperto / è APERTA)

Verifichiamo la definizione: c'è un raggio abbastanza piccolo che è contenuto dentro. C'è una palla contenuta dentro: $B'(a,\tilde{r}) \subset B(x,r)$



$(r - |x-a|)$ ed è un punto

$\tilde{r} = r - |x-a|$ RAGGIO PALLA B' CONTENUTA IN B

Per far vedere che la palla è dentro devo solo dimostrare che la sua distanza da x è $< r$.

$z \in B(a,\tilde{r}) \Rightarrow |z-a| < \tilde{r}$ cioè z sta nella palla B'

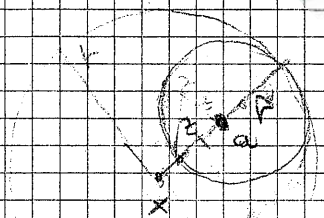
Voglio dimostrare che z sta in B

$|z-x| = |z-a+a-x| \leq |z-a| + |a-x| < \tilde{r} + |a-x| = r - |a-x| + |a-x| = r$

DISUGUAGLIANZA TRIANGOLARE $z-a < \tilde{r}$

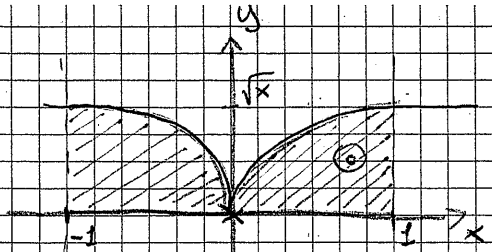
$\Rightarrow |z-x| < r$

$\in$: SEGNO DI INCLUSIONE. Mi permette di dire che se z sta in quella più piccola, allora sta anche in quella più grande. Basta dimostrare che $z - x < r$.



Ho dimostrato matematicamente che la palla è aperta.

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745



$f(x) = \sqrt{|x|}$

A è un insieme aperto perché la linea, qualsiasi è stretta. Non ho la freccia e posso mettere in oggetto all'interno.

$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < y < \sqrt{|x|} < 1\}$ aperto

Non perché è chiuso! Nemmeno origine

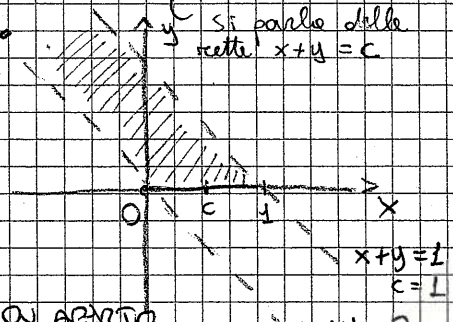
Prendo un raggio che contenga $f(x)$: $\sqrt{2}$ una palla di raggio $\sqrt{2}$ contenente quello insieme.

Def.

Diremo che $A \subset \mathbb{R}^n$ è limitato se $\exists R > 0$ tale che $A \subset B(0,R)$ cioè A è contenuto in una palla di raggio R

- $A = \{x, y \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x+y < 1, \ y \geq 0\}$

INSIEME 1 $0 < c < 1$ — INSIEME 2 — INTERSEZIONE INSIEME



si parla della retta $x+y=c$

Non comprendo le linee di contorno.

Non è aperto, altrimenti in qui punto potevo prendere una palla che ci sta dentro. Sul tratto nell'asse $y=0$ non posso farlo.

È ILLIMITATO perché posso prendere una palla che ha raggio r distante ∞ dall'origine.

NON APERTO

$P(-M, +M+c)$ punto dell'insieme? $\rightarrow$ $0 < -M+M+c = c < 1$

$0 < c < 1$

$M > 0$ $\rightarrow$ $M+c \geq 0$ si sceglie quantità positive

PER TROVARE DISTANZA DALL'ORIGINE

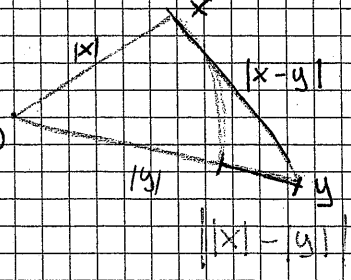
(1) NORMA EUCLIDEA $\rightsquigarrow |P_M| = \sqrt{M^2 + (M+c)^2} =$

$= \sqrt{M^2 + M^2 + c^2 + 2Mc} = M\sqrt{2 + \frac{c^2}{M^2} + \frac{2c}{M}} \rightarrow +\infty$ per $M \to +\infty$

Proprietà della NORMA: uso questa proprietà per dimostrare che è illimitato.

(1) $\big||x| - |y|\big| \leq |x-y| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$

La distanza tra x e y è < della differenza tra gli altri due lati



$|x| \leq |x-y+y| \leq |x-y| + |y|$

$\Rightarrow \big||x| - |y|\big| \leq |x-y|$

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9937745

Voglio dimostrare nell'esercizio che l'insieme è illimitato, senza dell'utilizzare di limite.