8/03/2018

COMPLEMENTI DI ANALISI

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

Definizione FLUSSO MISURABILE

Prendiamo un insieme $S \subset \mathbb{R}^3$ $\mathcal{B}$-misurabile; normale esterna $\nu: S \to \mathbb{S}^2$ anch'essa funzione $\mathcal{B}$-misurabile (ovvero: $\nu = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$, ν_i $\mathcal{B}$-misurabile)

$F: S \to \mathbb{R}^3$ $\mathcal{B}$-misurabile

$$\int_S |\langle F, \nu \rangle| \, d\mathcal{B} < +\infty$$ (ovvero la funzione $x \to \langle F(x), \nu(x) \rangle$ è $\mathcal{B}$-misurabile)

Sotto queste condizioni è ben definito il flusso: $$\Phi(S, F, \nu) = \int_S \langle F, \nu \rangle \, d\mathcal{B}$$

OSSERVAZIONE

Se $F \in C(S, \mathbb{R}^3)$ è continua, e $\sup_S |F| < +\infty$ è limitata

$\mathcal{B}(S) < +\infty$, $\nu: S \to \mathbb{R}^3$ continua

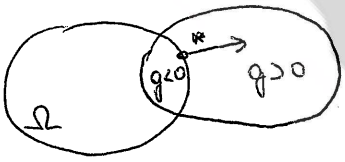
Allora esiste il flusso $\Phi(S, F, \nu) = \int_S \langle F, \nu \rangle \, d\mathcal{B}$

Esiste perché l'unica condizione è che sia integrabile il prodotto scalare tra la F e la normale:

$$\int_S |\langle F, \nu \rangle| \, d\mathcal{B} \leq \int_S \left(\sup_S |F|\right) d\mathcal{B} = \left(\sup_S |F|\right) \mathcal{B}(S) < +\infty$$

Abbiamo già visto, dato un aperto:

PUNTO DI FRONTIERA REGOLARE = dove definiamo la normale esterna ν



$$* \quad \nu(x) = \frac{\nabla g(x)}{|\nabla g(x)|}$$

$g \in C^1(0)$

La frontiera regolare di Ω ($\partial_{reg}\Omega$) è la raccolta di tutti questi punti.

Proposizione

Ω aperto $\subset \mathbb{R}^3$

$\nu: \partial_{reg}\Omega \to \mathbb{S}^2$ è continua



MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

TEOREMA DELLA DIVERGENZA

Prendiamo $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ aperto, limitato, connesso per archi
la differenza tra la frontiera topologica e quella regolare $\partial\Omega \setminus \partial_{reg}\Omega$ è
contenuta in un'unione finita di curve C^1 a tratti
Prendiamo della curve $F \in C^1(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^3)$

Allora: $$\int_\Omega \operatorname{div} F = \int_{\partial_{reg}\Omega} \langle F, \nu \rangle \, d\sigma = \Phi(\partial\Omega, F, \nu)$$

OSSERVAZIONE: ν è continua sulla frontiera regolare di Ω; sull'altra parte non lo so ma tanto non ci interessa perché trascurabile.

Definizione

$\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ è una superficie, se la parte singolare $\Sigma_S = \Sigma \setminus \Sigma_2$ è contenuta in un'unione finita di curve C^1 a tratti, dove

$\Sigma_2 = \{ x \in \Sigma \mid x \text{ è 2-regolare} \}$ è la parte regolare

MASTER COPY
Tel. 050 0312125
Cell. 388 9837745

Teorema

Supponiamo di avere $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ superficie
Prendiamo una successione di superfici σ-misurabili: $\Sigma_k \subset \Sigma$

$$\mathbb{1}_{\Sigma_k}(x) \longrightarrow \mathbb{1}_\Sigma(x) \quad \sigma\text{-q.o. } x \in \Sigma$$

la funzione caratteristica che vale 1 in Σ_k e zero fuori
e vale 1 in Σ e zero fuori

Prendiamo una funzione $f: \Sigma \to \mathbb{R}$ σ-misurabile e f è integrabile
(ovvero $\int_\Sigma |f| \, d\sigma < +\infty$)

Allora $\exists \lim_{k\to\infty} \int_{\Sigma_k} f \, d\sigma = \int_\Sigma f \, d\sigma$

ESEMPIO

Nelle ipotesi precedenti: $f \equiv 1$, $\sigma(\Sigma) < +\infty$, $\int_\Sigma 1 \, d\sigma = \sigma(\Sigma) < +\infty$

$\Rightarrow \sigma(\Sigma_k) \to \sigma(\Sigma)$

ESERCIZIO 1

$\Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z^2 - x^2 - y^2 = 0,\ 0 \le z \le 2\}$ insieme di $\mathbb{R}^3$

ν è la normale a Σ nei punti 2-regolari, ovvero $\nu: \Sigma_2 \to \mathbb{S}^2$ continua

la prendiamo continua così non "fa scherzi" non salta da una parte all'altra

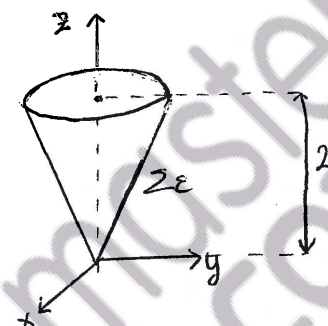
$\nu_3 < 0$ (ovunque negativa)
3° componente

Calcolare il flusso del rotore di f: $\Phi(\Sigma, \text{rot}F, \nu) = ?$

dove $F(x,y,z) = \left(\frac{x}{1+z}, -x\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{4}z\right), zy\right)$

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

Σ è un CONO



questo CONO non rientra nella classe delle superfici regolari a tratti.
→ il vertice crea problemi

1° metodo

Calcolare $\int_\Sigma \langle \text{rot}F, \nu \rangle d\sigma$ parametrizzando questo cono → calcolo abbastanza semplice

2° metodo

Applico il Teorema di Stokes: si riduce l'integrale ad una circuitazione al bordo!

Ma il vertice NON È REGOLARE ⇒ allora lo applico a delle superfici regolari Σ_ε

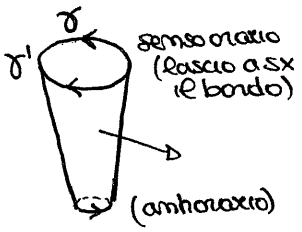
$$\Sigma_\varepsilon = \Sigma \cap (\mathbb{R}^2 \times [\varepsilon, +\infty)) \qquad \varepsilon > 0$$

$$\mathbb{1}_{\Sigma_\varepsilon}(x) \to \mathbb{1}_\Sigma(x) \quad \sigma\text{-quasi ovunque } x \in \Sigma$$

Sono nelle ipotesi del Teorema della convergenza (Teorema precedente)

$$\int_{\Sigma_\varepsilon} \langle \text{rot}F, \nu \rangle d\sigma \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} \int_\Sigma \langle \text{rot}F, \nu \rangle d\sigma$$

$x \to f(x) = \langle \text{rot}F(x), \nu(x) \rangle$ è σ-integrabile su Σ



γ' = giusta orientazione

γ = orientazione opposta → più facile da scrivere
↓
metto il meno qui poiché orientazione opposta a quella prevista dal Teorema di Stokes

master COPY COPISTERIA 050/8312126 388/9837745

$$\int_{\Sigma_\varepsilon} \langle \operatorname{rot} F, \nu \rangle = \ominus \int_\gamma F + \int_{\Gamma_\varepsilon} F$$

↑ metto il meno qui perché sto considerando l'orientazione opposta

$\gamma(t) = (2\cos t, 2\operatorname{sen} t, 2)$

$\Gamma_\varepsilon(t) = (\varepsilon\cos t, \varepsilon\operatorname{sen} t, \varepsilon)$

ω_F = forma differenziale associata al nostro campo

$$\int_{\Sigma_\varepsilon} \langle \operatorname{rot} F, \nu \rangle d\sigma = -\int_\gamma \omega_F + \int_{\Gamma_\varepsilon} \omega_F$$

$$= -\int_\gamma \frac{x}{3}dx - \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) x\,dy + 2y\,dz + \int_{\Gamma_\varepsilon} \omega_F =$$

$$\int_{\Gamma_\omega} \omega_F = \int_0^{2\pi} \langle F(\Gamma_\varepsilon(t)), \Gamma_\varepsilon'(t) \rangle dt$$

Facendone il modulo:

$$\left| \int_{\Gamma_\omega} \omega_F \right| \leq \int_0^{2\pi} |F(\Gamma_\varepsilon(t))| \cdot |\Gamma_\varepsilon'(t)| dt \leq$$

↑ Cauchy-Swarz

$$\leq \left(\max_{\Sigma} |F| \right) \cdot \left(\int_0^{2\pi} |\Gamma_\varepsilon'(t)| dt \right) \xrightarrow{\varepsilon \to 0} 0$$

↑ lo passo maggiorare con il massimo di tutto il corpo

$\int_0^{2\pi} |\Gamma_\varepsilon'(t)| dt = 2\pi \cdot \varepsilon$ stimo l'integrale con la lunghezza della curva

$$= -\left(\int_0^{2\pi} -\frac{4}{3} \underbrace{\cos t}_{dx = d\operatorname{sen} t} \operatorname{sen} t - 4\cos^2 t \right) dt$$

$$= \frac{2}{3} \underbrace{\int_0^{2\pi} \operatorname{sen} 2t\, dt}_{0} + 4 \int_0^{2\pi} \cos^2 t\, dt = 4\pi$$

$\int_0^{2\pi} \cos^2 t\, dt = \pi$

↓ 0

è funzione periodica e in 0 e 2π assume lo stesso valore

MASTER COPY
COPISERIA
050/8312126 3881983745

ESERCIZIO 2

Σ è l'insieme dei punti $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$

$$\begin{cases} x = uv & -1 \le v-u \le 1 \\ y = u \\ z = v-u & 0 \le u \le 1 \end{cases}$$

normale $\nu: \Sigma_2 \to S^2$ continua, con la 1° componente positiva $(\nu_1 > 0)$

$F = (xy, z, x^2)$ campo vettoriale

① Calcolare il flusso del rotore di F, attraverso Σ, secondo la direzione ν: $\Phi(\Sigma, \text{rot}F, \nu)$

② Provare che Σ è regolare a tratti con bordo e calcolare

$$\int_{\partial^+\Sigma} xy\,dx + z\,dy + x^2\,dz$$

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

① Rispondiamo alla 1° domanda come se non sapessimo che Σ è regolare a tratti.

$\Phi(u,v) = (uv, u, v-u)$ PARAMETRIZZAZIONE

Derivate parziali di Φ → il loro prodotto vettoriale mi dà il vettore normale

$$\frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v} = \begin{pmatrix} v \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} u \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \det \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ v & 1 & -1 \\ u & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -v-u \\ -u \end{pmatrix}$$ vettore normale

la prima componente è positiva $(\nu_1 > 0)$ ok!

Se trovavo la 1° componente negativa, bastava prendere il vettore opposto (mettendo il segno meno a tutte le componenti)

$$\text{rot}F = \det \begin{pmatrix} e_1 & \partial_1 & xy \\ e_2 & \partial_2 & z \\ e_3 & \partial_3 & x^2 \end{pmatrix} = e_1 \det \begin{pmatrix} \partial_2 & z \\ \partial_3 & x^2 \end{pmatrix} - e_2 \det \begin{pmatrix} \partial_1 & xy \\ \partial_3 & x^2 \end{pmatrix} + e_3 \det \begin{pmatrix} \partial_1 & xy \\ \partial_2 & z \end{pmatrix} =$$

$$= e_1(0-1) - e_2(2x-0) + e_3(0-x) = (-1, -2x, -x)$$

$$\Phi(\Sigma, \text{rot}F, \nu) = -\int_{\Sigma_2} \langle (1, 2x, x), \nu(x,y,z) \rangle \, d\sigma =$$

(1, 2x, x) ↑ rotF; $\nu(x,y,z)$ ↑ normale

$$= -\int \langle (1, 2uv, uv), \frac{(1, -v-u, -u)}{\sqrt{1+(v+u)^2+u^2}} \rangle \cdot |J\Phi| \, du\,dv =$$

(1, 2uv, uv) *; $\frac{(1,-v-u,-u)}{\sqrt{1+(v+u)^2+u^2}}$ va normalizzato; $|J\Phi|$ jacobiano

formula dell'integrale di superficie