ANALISI 2

Teo $x,y \in \mathbb{R}^n$, $\langle x,y\rangle = |x||y|\cos\theta$ con θ angolo compreso tra x e y

DISUGUAGLIANZA CAUCHY-SCHWARZ: $x,y \in \mathbb{R}^n \to \langle x,y\rangle \leq |x||y|$

$\Rightarrow \quad |\langle x,y\rangle| \leq |x||y|$

Teo: $x,y \in \mathbb{R}^n \Rightarrow |x+y| \leq |x|+|y|$ DISUGUAGLIANZA TRIANGOLARE

Dati: $V=(a_1 \dots a_n)$ $x_0=(x_{0_1},\dots,x_{0_n})$ $X=(x_1 \dots x_n)$

vettore V è perpendicolare a X in x_0

$\langle V, x-x_0\rangle = 0 \iff \sum_{j=1}^{n} a_j (x_j - x_{0_j}) = 0$

MASTER COPY
Tel. 050 831 21 26
Cell. 388 9837745

Data $f: A \to B$ $f(A) \subset B$ $b \in B$

Definisco grafico di f $\quad gr f = \{(x,y) \in A \times B \mid y = f(x), x \in A\}$

$= \{(x, f(x)) \in A \times B \mid x \in A\} \subset A \times f(A)$

Def: $B(x_0,r) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x-x_0| < r\}$ con $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $r>0$

Palla di centro x_0 e raggio r "senza buccia"

Def: A è aperto: $A \subset \mathbb{R}^n$ ap. se $\forall x \in A \ \exists r_x > 0$ t.c. $B(x,r_x) \subset A$

Def: $F \subset \mathbb{R}^n$ chiuso se $F^c = \mathbb{R}^n \setminus F$ è aperto

Se $A_j \subset \mathbb{R}^n$ aperto $\forall j \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$, $\bigcup_{j=1}^{n} A_j$, $\bigcap_{j=1}^{n} A_j$ sono aperti

Se $F_j \subset \mathbb{R}^n$ chiusi $\forall j \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcup_{j=1}^{n} F_j$, $\bigcap_{j=1}^{n} F_j$, $\bigcap_{j=1}^{\infty} F_j$ sono chiusi

Def: $A \subset \mathbb{R}^n$ $x \in \mathbb{R}^n$ è di frontiera se $\forall r>0$ $A \cap B(x_0,r) \neq 0$

$A^c \cap B(x_0,r) \neq 0 \Rightarrow \partial A = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x \text{ di frontiera}\}$

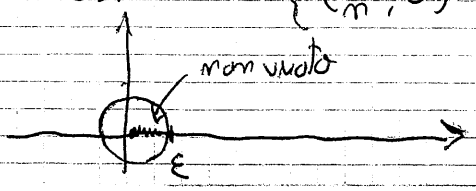
Def: $A \subset \mathbb{R}^n$ x interno ad A se $\exists r>0$ $B(x_0,r) \subset A$

$\Rightarrow \mathring{A} = \{x \in A \mid x \text{ è interno di } A\}$

Def: x è isolato se $\exists \bar{r}$ t.c. $A \cap B(x,\bar{r}) = \{x\}$

Def: $A \subset \mathbb{R}^n$ $x \in \mathbb{R}^n$ è derivato di A se $\forall \varepsilon > 0$ $A \cap B(x,\varepsilon) \setminus \{x\} \neq 0$

es: $A = \left\{\left(\frac{1}{n}, 0\right) \mid n>1, n \in \mathbb{N}\right\}$



$\Rightarrow D(A)$ insieme derivato di A

$\mathring{A} \subset D(A)$

Def: Data successione x_j essa converge a x_0:

$\{x_j\}$ $x_j \to x_0$ $j \to \infty$ se $\lim_{j\to\infty} |x_j - x_0| = 0$

Prop: $\{x_j\} \subset \mathbb{R}^n$ è convergente $\iff$ tutte le sue componente sono succ. reali convergenti

$x_j \to x_0 \iff x_{j,1} \to x_{0,1}, \dots, x_{j,m} \to x_{0,m}$ $j \to \infty$

Def: $A \subset \mathbb{R}^n$ limitato se $\exists\, r > 0$ t.c $A \subset B(0,r)$

Def: $\{x_k\}$ limitata se la sua immagine è un'insieme limitato

$\iff \exists\, R > 0$ $|x_k| < R$ $\forall k \geq 0$

Oss: Se $x_k \xrightarrow{k\to\infty} \omega \in \mathbb{R}^n \Rightarrow \{x_k\}$ è limitata

Def: $x_k \to \infty$ è divergente $\iff |x_k| \to +\infty$

Def: Chiusura di A: $A \subset \mathbb{R}^n \Rightarrow \bar{A} = \{\omega \in \mathbb{R}^n \mid \exists \{x_k\} \subset A \text{ per } x_k \to \omega\}$

PROP: $A \subset \mathbb{R}^n$ valgono le seguenti:

1) $\partial A \subset \bar{A}$ 2) A chiuso $\iff A = \bar{A}$ 3) $\bar{A} = A \cup D(A) = A \cup \partial A$

4) $\mathring{A} \cap \partial A = \emptyset$ 5) A aperto $\iff A = \mathring{A}$ 6) A ap. $\Rightarrow A \subset D(A)$

Def: $C \subset \mathbb{R}^n$ compatto $\iff \forall \{x_k\} \subset C$ $\exists$ sottosuccessione $\{x_{k_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ convergente e t.c il suo limite

$\omega = \lim_{j\to\infty} x_{k_j} \in C$

Teo: C compatto $\iff$ chiuso e limitato

LIMITI A + VARIABILI:

Def: $A \subset \mathbb{R}^n$, $x_0 \in D(A)$, $\ell \in \mathbb{R}^N$, $f: A \to \mathbb{R}^N$ diremo

$f(x) \to \ell$ $x \to x_0$ o $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell$ se

$\forall\, \varepsilon > 0$ $\exists\, \delta_\varepsilon > 0$ t.c $\forall x \in A \cap B(x_0, \delta_\varepsilon) \setminus \{x_0\}$

$|f(x) - \ell| < \varepsilon$ $(|x - x_0| < \delta_\varepsilon,\ x \in A,\ x \neq x_0)$

PROP: $g, f: A \to \mathbb{R}^N$ $h: A \to \mathbb{R}$, $x_0 \in D(A)$,

$f(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} \ell \in \mathbb{R}^N$, $g(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} L \in \mathbb{R}^N$, $h(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} \lambda \in \mathbb{R}$

Valgono le seguenti:

1) $\lambda \neq 0 \Rightarrow \lambda - \frac{|\lambda|}{2} < h(x) < \lambda + \frac{|\lambda|}{2}$ $\forall x \in A \cap B(x_0, \delta_0) \setminus \{x_0\}$

2) $(f+g)(x) \to \ell + L \in \mathbb{R}^N$

3) $(f \cdot h)(x) \to \ell\lambda \in \mathbb{R}^N$

4) $\lambda \neq 0 \Rightarrow f/h \to \ell/\lambda \in \mathbb{R}^N$

Teo: $A \subset \mathbb{R}^n$ $x_0 \in D(A)$ $f, g, h : A \to \mathbb{R}$ $\exists\, \delta > 0$ t.c
$f(x) \le h(x) \le g(x)$ $\forall\, x \in A \cap B(x_0, \delta)$
$A \cap B(x_0, \delta) \setminus \{x_0\} \neq \emptyset$ $\forall\, \delta > 0$

Se $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty \Rightarrow \lim_{x \to x_0} h(x) = +\infty$

Se $\lim_{x \to x_0} g(x) = -\infty \Rightarrow \lim_{x \to x_0} h(x) = -\infty$

Se $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = l \in \mathbb{R} \Rightarrow \lim_{x \to x_0} h(x) = l$

Def: Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ $x_0 \in A$ e $f : A \to \mathbb{R}^m$
Se x_0 è isolato allora diremo che f continua in x_0
Diversamente quando $x_0 \in D(A)$ diremo che f continua in x_0 se
$\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

PROP: $A \subset \mathbb{R}^n$ $f, g : A \to \mathbb{R}^m$ $h : A \to \mathbb{R}$ se $x_0 \in A$ e
f, g, h continue in x_0 allora:
1) $(f+g) : A \to \mathbb{R}^m$ continua in x_0
2) $(f \cdot h) : A \to \mathbb{R}^m$ continua in x_0
3) $h(x_0) \neq 0$: $\frac{f}{h}$ continua in x_0

Teo: $A \subset \mathbb{R}^n$, $B \subset \mathbb{R}^m$ $f : A \to \mathbb{R}^m$ $g : B \to \mathbb{R}^k$ Allora:
1) se f continua in x_0 e g continua in $f(x_0)$ allora
$g \circ f : A \to \mathbb{R}^k$ continua in x_0
2) se f continua in A e g continua in $B \Rightarrow g \circ f$ cont. in A

Teo (Weierstrass): Sia $C \subset \mathbb{R}^n$ compatto, $f : C \to \mathbb{R}$ continua
$\Rightarrow \exists \max_C f$ e $\min_C f$

Def: Dato $A \subset \mathbb{R}^n$ non limitato e $f : A \to \mathbb{R}^k$ diremo che
$\lim_{x \to \infty} f(x) = l \in \mathbb{R}^k$ se $\forall\, \varepsilon > 0$ $\exists\, M_\varepsilon > 0$ t.c $|f(x) - l| < \varepsilon$
$\forall\, x \in A$, $|x| > M_\varepsilon$

se $l = \infty$ allora $\forall\, H > 0$ $\exists\, M_H > 0$ t.c $|f(x)| > H$
$\forall\, x \in A$ $|x| \ge M_H$

se $f : A \to \mathbb{R}$ $l = +\infty$ $\forall\, H > 0$ $\exists\, M_H > 0$ t.c $f(x) > H$
$\forall\, x \in A$ $|x| \ge M_H$

Esempio: $f(x,y) = |x|$ $\nexists \lim_{(x,y) \to \infty} f(x,y)$: $f(n,0) = |n| \xrightarrow{n \to \infty} +\infty$
$f(0,n) = 0 \to 0$

$f(x,y,z) = e^{-y^2 - z^2 + \sin x}$ $\nexists \lim_{(x,y,z) \to \infty} f(x,y,z)$: $f(0,n,0) = e^{-n^2} \to 0$
$f(\frac{\pi}{2} + n\pi, 0, 0) = e$

Teo: Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ chiuso e illimitato e $f: A \to \mathbb{R}$ continua.

1) Se $\lim_{x \to \infty} f(x) = +\infty \Rightarrow \sup_A f = +\infty \quad \exists \min_A f$

2) se $\lim_{x \to \infty} f(x) = -\infty \Rightarrow \inf_A f = -\infty \quad \exists \max_A f$

3) se $x_0 \in A$ e $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \Rightarrow \exists \min_A f$ e $\max_A f$

PROP: $\forall x \in \mathbb{R}^n$ e α positivo abbiamo:

$$\sum_{j=1}^{n} |x_j|^\alpha \leq n |x|^\alpha$$
$$\geq \frac{1}{n^{\alpha/2}} |x|^\alpha$$

PROP: Se $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ $f, g: \Omega \to \mathbb{R}$ derivabili parzialmente rispetto x_j in $x_0 \in \Omega$ allora anche $\lambda f + \mu g: \Omega \to \mathbb{R}$ ha derivata parziale rispetto x_j in x_0 e vale:

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(\lambda f + \mu g)(x_0) = \lambda \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0) + \mu \frac{\partial g}{\partial x_j}(x_0)$$

Def: $L: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ lineare se $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$ e $\forall \lambda \in \mathbb{R}$
$L(x+y) = L(x) + L(y)$ e $L(\lambda x) = \lambda L(x)$

Prop: Se $L: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ lineare $\Rightarrow \exists a \in \mathbb{R}^n$ t.c
$L(x) = \langle a, x \rangle$

SPAZIO **DUALE** $(\mathbb{R}^n)^* = \{L: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \mid L \text{ lineare}\}$
$dx_1 \dots dx_n$ è base di $(\mathbb{R}^n)^*$

Def: Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ $x_0 \in \Omega$ $L: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f: \Omega \to \mathbb{R}$ diremo che f è differenziabile in x_0 se vale:

$$\lim_{y \to x_0} \frac{f(y) - f(x_0) - L(y - x_0)}{|x_0 - y|} = 0$$

Def: poniamo $df(x_0) = L: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$
$$df(x_0) = \sum_{j=1}^{n} x_j dx_j$$

Prop: Se $f: \Omega \to \mathbb{R}$ differenziabile in $x_0 \in \Omega$ allora
$$df(x_0) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0) dx_j = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0) dx_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0) dx_n$$

Prop: $f: A \to \mathbb{R}$, A illimitato, $A \subset \mathbb{R}^n$

$f(x) \xrightarrow[x \to \infty]{} \ell \iff \forall (x_k) \subset A \quad |x_k| \xrightarrow[k \to \infty]{} \infty$

Allora $\exists \lim_{x \to \infty} f(x_k) = \ell \qquad \ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$

Def: $f: \Omega \to \mathbb{R}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ $x_0 \in \Omega$ f differenziabile in x_0

definiamo gradiente il vettore che ha come componenti le derivate parziali $\nabla f(x_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0) \right)$

indica la direzione in cui c'è la maggiore pendenza

Def: derivata direzionale: $f: \Omega \to \mathbb{R}$ $x_0 \in \Omega$

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + tv) - f(x_0)}{t}$$

Prop: $f: \Omega \to \mathbb{R}$ differenz in $x_0 \in \Omega$ $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ allora

$\exists \frac{\partial f}{\partial v}(x_0)$ e soddisfa $\frac{\partial f}{\partial v}(x_0) = df(x_0)(v)$

oss: $df(x_0) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f(x_0)}{\partial x_j} dx_j$

$$df(x_0)(x) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f(x_0)}{\partial x_j} x_j = \langle \nabla f(x_0), x \rangle$$

oss: $\frac{\partial f(x_0)}{\partial v} = df(x_0)(v) = \langle \nabla f(x_0), v \rangle$

Prop: Se f differenz in $x_0 \implies f$ continua in x_0

Prop: $f: \Omega \to \mathbb{R}$ $x_0 \in \Omega$ x_0 punto di max locale allora se

$\exists \frac{\partial f(x_0)}{\partial v}$ $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ abbiamo $\frac{\partial f(x_0)}{\partial v} = 0$

Prop: Se $f: \Omega \to \mathbb{R}$ differ. in x_0 e ha min o max locale in x_0

$\implies \nabla f(x_0) = (0, \dots, 0)$

Def: Diremo $x_0 \in \Omega$ PUNTO CRITICO se è punto di differenziabilità di f e $\nabla f(x_0) = (0, \dots, 0)$

Teo: $f: \Omega \to \mathbb{R}$, $B(x_0, r) \subset \Omega$, $\exists \frac{\partial f}{\partial x_j}: B(x_0, r) \to \mathbb{R}$

$\forall j = 1 \dots n$ e sono tutte continue

$\implies f$ è differenziabile in x_0

Def: $C^0(\Omega) = \{ f: \Omega \to \mathbb{R} \mid f \text{ continua} \}$

$C^1(\Omega) = \left\{ f: \Omega \to \mathbb{R} \mid \exists \frac{\partial f}{\partial x_j} \in C^0(\Omega) \ \forall j = 1 \dots n \right\}$

APPUNTI UNIPD CORISTERIN 350/9837755 050/8312145