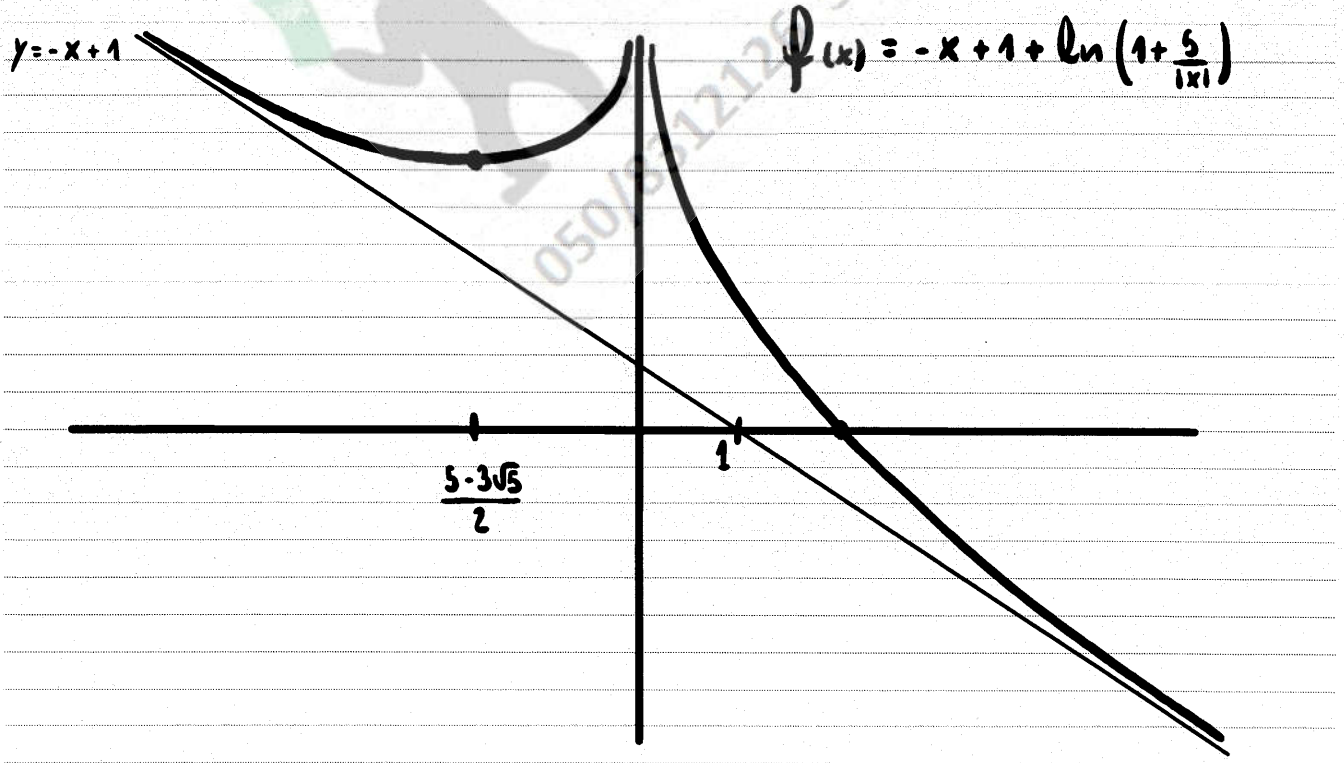
ESERCITAZIONI DI

ANALISI MATEMATICA I

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

PROF. PIETRO MAJER, STEPANOV, GEORGIEV — ANNO: 2017 - 2018

CORSO: INGEGNERIA ELETTRONICA — APPUNTI DI EDOARDO ORZES



PRESENTAZIONE

GLI ESERCIZI SONO SUDDIVISI PER TIPOLOGIA

E SONO TUTTI SVOLTI CON OGNI PASSAGGIO

NOTA: OGNI PARAGRAFO SI PRESENTA CON TITOLO INTRODUTTIVO E IMMAGINE,
DI SOLITO NELLA PRIMA PARTE CI SONO GLI ESERCIZI SVOLTI IN CLASSE, POI
ALTRI ESERCIZI RACCOLTI DA MOLTE PROVE D'ESAME,
SVOLTI CON CURA E IN MODO COMPLETO.
SONO PRESENTI OLTRE 400 ESERCIZI SVOLTI.

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

INDICE

1] ESERCIZI DI BASE: EQUAZIONI, DISEQUAZIONI, STUDIO DI UN INSIEME,
FUNZIONI ESPONENZIALI E TRIGONOMETRICHE,
STUDIO DI FUNZIONE ED ALTRI PROBLEMI ANALOGHI

2] LIMITI E TAYLOR: LIMITI DI SUCCESSIONI, LIMITI DI FUNZIONI,
SVILUPPI DI TAYLOR (ANCHE FINO AL 7° ORDINE)

3] SUCCESSIONI DEFINITE PER RICORRENZA

4] SERIE E SOMME: SOMME PARZIALI E STUDIO DELLA CONVERGENZA

5] NUMERI COMPLESSI

6] INTEGRAZIONE: INTEGRALI DEFINITI, INTEGRALI IMPROPRI
E STUDIO DELLA CONVERGENZA

7] CALCOLO DIFFERENZIALE

DISEQUAZIONI LINEARI

$$(4x-5)^2 - \overbrace{(4x+3)(4x-3)}^{16x^2-9} + 9x \leq 9(x-9) + 35$$

$$\cancel{16x^2} - 40x + 25 - \cancel{16x^2} + \cancel{9} + 9x - 9x + 81 - 35 \leq 0$$

$$-40x + 80 \leq 0$$

$$x \geq 2$$

$$x \in [2, +\infty)$$

$$x^3 - 1 - x(x^2 - 3) + 6 \geq 3(x-2)$$

$$x^3 - 1 - x^3 + 3x + 6 - 3x + 6 \geq 0$$

$$11 \geq 0$$

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

$1+2+3 \ldots + n \quad | \quad 1, 2, 3 \ldots, n$ SOLUZIONI DI UNA DISEQUAZIONE

$$x\left(x+\frac{1}{3}\right)\left(x-\frac{1}{3}\right) - \frac{1}{3}\left(x^2 - \left(15 + \frac{2}{9}\right)\right) > \left(x-\frac{1}{3}\right)\left(x^2 + \frac{x}{3} + \frac{1}{9}\right) - \frac{1}{3}(x-1)^2$$

SOL: $x \in (-\infty, 7)$ SOL. DI $\mathbb{N}_+$ SONO $1, 2, \ldots 6$

$1+2 \ldots +6 = 21$

$(\;)$ → INTERVALLO APERTO → ESTREMI ESCLUSI

$[\;]$ → INT. CHIUSO → E. INCLUSI

$$A = \left\{ x,\ x\left(x+\frac{1}{3}\right)\left(x-\frac{1}{3}\right) - \frac{1}{3}\left(x^2 - \left(15 + \frac{2}{9}\right)\right) > \left(x-\frac{1}{3}\right)\left(x^2 + \frac{x}{3} + \frac{1}{9}\right) - \frac{1}{3}(x-1)^2 \ , \ x \in \mathbb{R} \right\}$$

SUP A = 7 MA 7 NON É MASSIMO

$$A = \left\{ x,\ x\left(x+\frac{1}{3}\right)\left(x-\frac{1}{3}\right) - \frac{1}{3}\left(x^2 - \left(15 + \frac{2}{9}\right)\right) > \left(x-\frac{1}{3}\right)\left(x^2 + \frac{x}{3} + \frac{1}{9}\right) - \frac{1}{3}(x-1)^2 \ , \ x \in \mathbb{N}_+ \right\}$$

$\mathbb{N}_+ = \{1, \ldots +\infty\}$

SUP A = 6 = MAX A [SOL: $[1, 7)$]

DISEQUAZIONI DI SECONDO GRADO

$x^2 \geq 0 \quad \forall x$ OPPURE $\mathbb{R}$

$x^2 > 0 \quad \forall x \neq 0$ OPPURE $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

$x^2 \leq 0 \quad x = 0$

$x^2 < 0 \quad \nexists x$ OPPURE ϕ

$ax^2 + bx + c > 0$

$a > 0$ ∪ $a < 0$ ∩

$a > 0$	$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$
$ax^2 + bx + c > 0$	(x_1, x_2)	ϕ	ϕ
(CONCORDI) SOL:	ESTERNE	$\forall x \neq n$	$\forall x$
$a < 0$ (DISCORDI) SOL:	INTERNE	$\nexists x$	$\nexists x$

$ax^2 + bx + c > 0$

- $\Delta > 0$
  - SE $+a; > 0 \ -a; <$ → $X < -N \ ; \ X > N$
  - SE $+a; < 0 \ -a; >$ → $-N < X < N$
- $\Delta = 0$
  - CONCORDI → $\forall x \ (x \neq N)$
  - DISCORDI → $\nexists x$
- $\Delta < 0$
  - CONCORDI → $\forall x$
  - DISCORDI → $\nexists x$

$(1+x)^2 < 1-x^2$

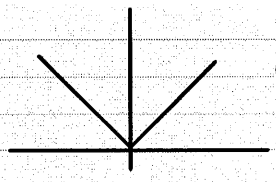
$1+2x+x^2-1+x^2 < 0$

$2x+2x^2 < 0$

$x^2+x < 0$

$-1 < x < 0$

$|x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$

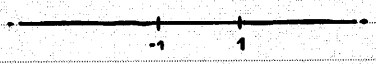


PARI $f(-x) = f(x)$

$(1+x)^2 < |1-x^2|$

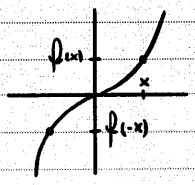
$\begin{cases} 1-x^2 \geq 0 & -1 < x < 0 \quad \checkmark \\ 1-x^2 < 0 & x < -1 \quad \checkmark \end{cases}$ $(-\infty, 0) \setminus \{-1\}$ o $(-\infty, -1) \cup (-1, 0)$

$x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$



$\sqrt{x}$ D: $x \geq 0$ o $[0, +\infty)$

$\sqrt[3]{x}$ D: $\mathbb{R}$



DISPARI $f(-x) = -f(x)$

$\sqrt{x^2} = |x|$

$(1+x)^n \geq 1+nx \quad \forall x \geq 0$

F1. $x = 1 \quad 2^n \geq 1+n$ ✓

F2. $n = k+1 \quad 2^{k+1} \geq k+2$

$(x = 1) \quad 2^n \cdot 2 \geq 2(1+n)$

$2^{k+1} \geq 2+2n \geq k+2$ ✓

ovvio

$(1+x)^n \geq 1+nx \quad \forall n \in \mathbb{N}_+$ DISUGUAGLIANZA DI BERNULLI

F1. $n = 2 \quad 1+2x+x^2 \geq 1+2x$ ✓

F2. $n = k \quad (1+x)^k \geq 1+kx$

F3. $n = k+1 \quad (1+x)^{k+1} \geq 1+x(k+1) = 1+kx+x$

$(1+x)^k \geq 1+kx$

$(1+x)^k (1+x) \geq (1+kx)(1+x)$

$(1+x)^{k+1} \geq 1+x+kx+kx^2 \geq 1+kx+x$ ✓

ovvio

INDUZIONE

$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

$1 = \frac{2 \cdot 3}{6}$ ✓

$\sum_{i=1}^{n+1} i^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$

PASSAGGIO INDUTTIVO

$= \sum_{i=1}^{n} i^2 + (n+1)^2$ ✓

$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2$

$= \frac{n(n+1)(2n+1)+6(n+1)^2}{6}$

$= \frac{n(2n^2+n+2n+1)+6n^2+12n+6}{6}$

$= \frac{2n^3+n^2+2n^2+n+6n^2+12n+6}{6}$

$= \frac{2n^3+9n^2+13n+6}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$ ✓

$(1+x)^n \geq 1+nx \quad \forall n \in \mathbb{N}_+$

F1 $1+x \geq 1+x$ ✓

F2 $1+x^2+2x \geq 1+2x$ ✓

F3 $(1+x)^{n+1} \geq 1+nx+x$

$(1+x)^n \geq 1+nx$

$(1+x)^n (1+x) \geq (1+nx)(1+x)$

$(1+x)^{n+1} \geq 1+x+nx+nx^2 \geq$

ovvio

master cosy COMISTRA 388/1831715 050/8312126

INSIEME F PARTE DA $x_1 = 1$

È LIMITATO ?

$x_2 = x_1 + \frac{1}{x_1} = 1 + 1 = 2$

$x_3 = x_2 + \frac{1}{x_2} = 2 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

$x_4 = x_3 + \frac{1}{x_3} = \frac{3}{2} + \frac{2}{3} = \frac{13}{10}$

$F = \{ x_n : n \in \mathbb{N} \}$ $\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_{n+1} = x_n + \frac{1}{x_n} \end{cases}$

ESEMPIO 1

$x_1 = 1$

$x_{n+1} = x_n + 1$

$x_n = n$

ESEMPIO 2

$x_1 = c$

$x_{n+1} = x_n + 1$

$x_2 = c + 1$

$x_n = c + (n-1)$

ESEMPIO 3

$x_1 = 1$

$x_{n+1} \geq x_n + 1$

$x_n \geq n$

ESEMPIO 4

$x_1 = c$

$x_{n+1} \geq x_n + 1$

$x_2 \geq c + 1$

$x_n \geq c + (n-1)$

ESEMPIO 5

$d > 0$

$x_{n+1} = x_n + d$

$x_n = 1 + d(n-1)$

ESEMPIO 6

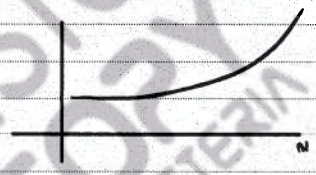
$d > 0$

$x_{n+1} \geq x_n + d$

$x_n \geq 1 + d(n-1)$

$\{1, 1+d, 1+2d \dots, 1+nd\} = G$ ILLIMITATO DALL'ALTO

$F = \{ x_n : n \in \mathbb{N} \}$ $\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_{n+1} = x_n + \frac{1}{x_n} \end{cases}$



INVITO : F NON HA MAGGIORANTE (IPOTESI 1)

DIMOSTRO PER ASSURDO

SE 1 NON È VERO, ALLORA F HA MAGG. $M > 0$

$x_n \leq M$

$x_{n+1} \geq x_n + \frac{1}{M}$ → $x_{n+1} = x_n + \frac{1}{x_n} \geq x_n + \frac{1}{M}$

$x_{n+1} \geq x_n + d$ GRAZIE A ES.6 $x_n \geq 1 + (n-1)d$ CONTRADDICE $x_n \leq M$ QUINDI F NON HA MAGG.

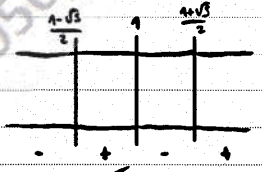
$1 + (n-1)d \leq M \rightarrow n - 1 \leq \frac{M-1}{d}$

$A = \left\{ x, \ |x| < \frac{1}{x-1} \right\}$ SUP A = ? INF A = ? MAX A = ? MIN A = ?

$|x| = \begin{cases} 1. \ x & x \geq 0 \\ 2. \ -x & x < 0 \end{cases}$ D: $x \neq 1$

1. $x < \frac{1}{x-1}$ $\frac{x^2 - x - 1}{x-1} < 0$ F1 < 0 $\frac{1-\sqrt{5}}{2} < x < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

F2 < 0 $x < 1$



SOL: ~~$x < \frac{1-\sqrt{5}}{2}$~~ ; $1 < x < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

$x \in \left(1, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$

2. $-x < \frac{1}{x-1}$ $\frac{-x^2 + x - 1}{x-1} < 0$ F1 < 0 $\forall x$ SOL: ϕ

F2 < 0 $x < 1$

SUP A = $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ INF A = 1

MAX A = ∄ MIN A = ∄

$\sqrt{x} = \sqrt{-x}$ $x = 0$

$(\sqrt{x})^2 = x$

$\sqrt{x^2} = |x|$

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745
master copy COPISTERIA 050/8312126 388/9837745