ANALISI MATEMATICA I

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

PROF: PIETRO MAJER

ANNO: 2017 - 2018

CORSO: INGEGNERIA ELETTRONICA

APPUNTI DI EDOARDO ORZES

CONTENUTO:

1) OPERAZIONI E CAMPI, DISUGUAGLIANZE, MAGGIORANE ED ESTREMO SUPERIORE, SUCCESSIONI, LIMITI DI SUCCESSIONI E DI FUNZIONI, FUNZIONI CONTINUE, STIMA DEL NUMERO DI EULERO METODO DI BISEZIONE, SUCCESSIONI PER RICORRENZA

2) SERIE E COMBINATORIA ELEMENTARE

3) DERIVAZIONE

4) NUMERI COMPLESSI

5) ANCORA DERIVAZIONE

6) INTEGRAZIONE

7) SVARIONI VARI

VLADIMIR GEORGIEV / EVGENII STEPANOV PIETRO.MASER@UNIPI.IT RELASTRI.UNIPI.IT → CORSI ATTIVI

ANAUSI PIETRO MASER 004AA 12 CREDITI 120h GEORGIEV@dm.UNIPI.IT → ARGOMENTI DI LEZIONE

RICEVIMENTI: MARTEDI' ORE 13:00 - 13:30 F8

ESAMI: 7 APPELLI (3 INVERNALI, 3 ESTIVI, 1 AUTUNNALE) PROVA SCRITTA 3 ORE

POI PROVA ORALE (NELLO STESSO APPELLO) 30 MINUTI

- NUMERI REALI - ESTREMO SUPERIORE
- INSIEMI E TERMINOLOGIA - MATEMATICA DISCRETA
- LIMITI DI SUCCESSIONI - CONTINUITÀ DI FUNZIONI - TEOREMI
- DIFFERENZIALI - INTEGRALI - SERIE
- NUMERI $\mathbb{C}$

NUMERI REALI

INSIEME "$\mathbb{R}$" CON ELEMENTI DETTI NUMERI REALI

CI SONO OPERAZIONI → SOMMA, PRODOTTO

FUNZIONE → LEGGE CHE ASSOCIA AD UNA COPPIA DI ELEMENTI UN TERZO ELEMENTO

SOMMA → $\forall x,y \in \mathbb{R} \mid x+y = y+x$ COMMUTATIVA

$\forall x,y,z \in \mathbb{R} \mid (x+y)+z = x+(y+z)$ ASSOCIATIVA

ESISTE LO ZERO → $0 \in \mathbb{R} \mid 0+x = 0$ ELEMENTO NEUTRO

$\forall x \in \mathbb{R}$ AMMETTE UN OPPOSTO → $\exists x' \in \mathbb{R} \mid x+x' = 0$

GRUPPO COMMUTATIVO: INSIEME DI 2 ELEMENTI EX/ PARI, DISPARI → $P+0=D$, $P+P=P$, $D+D=P$

PRODOTTO → $\forall x,y \in \mathbb{R} \mid xy = yx$ COMMUTATIVA

ELEMENTO NEUTRO: $\exists 1 \mid 1x = x \ \forall x \in \mathbb{R}$

OGNI ELEMENTO $x \neq 0$ AMMETTE UN INVERSO $\exists x' \mid xx' = 1$ RECIPROCO

NUMERI REALI NON NULLI SONO UN GRUPPO COMMUTATIVO CON L'OPERAZIONE PRODOTTO $PP=P$, $PD=P$, $DD=D$ → CAMPO

$x(y+z) = xy+xz$ DISTRIBUTIVA

GRUPPO NE HA 1

$(\mathbb{R},+,\cdot)$ È UN CAMPO → INSIEME CON DUE OPERAZIONI

ES DI CAMPO: CAMPO DI FUNZIONE RAZIONALE $\frac{P(x)}{Q(x)} \in \mathbb{R}\{\}$; $+$; $\cdot$

CAMPO COMPLESSO $\mathbb{C}$

EX/ NEL PIANO CARTESIANO ASSOCIA COPPIE ORDINATE DI $\mathbb{R}$ A PUNTI NEL PIANO

FUNZIONE DIPENDE DA 2 INSIEMI E 1 LEGGE

GRUPPI DI ENTI CHE VERIFICANO UN CRITERIO COMUNE

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

ORDINAMENTO

RELAZIONE DI ORDINE

$A \subseteq B$ CONTENUTO, OGNI ELEMENTO DI A È PURE ELEMENTO DI B

$d \mid n$ n È MULTIPLO DI d, OVVERO $n = kd$ $(k \in \mathbb{N})$

$x \leq y$ E $y \leq z$ ALLORA $x \leq z$

$x \leq y$ E $y \leq x$ SOLO SE $x = y$

PER OGNI x, y O $x \leq y$ O $y \leq x$

$\leq$ È LEGATO A $+$, $\cdot$

SE $x \leq y$ ALLORA $x+z \leq y+z$ $\forall z$

SE $x \leq y$ ALLORA $xz \leq yz$ SOLO SE $z \geq 0$

$a \geq b = B \supseteq A$ (CONTENUTO)

$\{P, D\}$ È CAMPO NON ORDINABILE

NEL CAMPO DELLE FUNZIONI RAZIONALI È ORDINATO SE DEFINO CHE $C \leq x$ → NEMMA SOMMA È UN GRUPPO

QUINDI $\mathbb{R}, +, \cdot, \leq$ È CAMPO ORDINATO, L'UNICO COMPLETO

ESERCIZI

$1+2+\dots+n = \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} = S$ SOMMATORIA

$2S = 1+2+3+\dots+n$

$+ n+(n-1)+(n-2)\dots+1$

$(n+1)+(n+1)+(n+1)\dots+(n+1) = n(n+1) = 2S \quad S = \frac{n(n+1)}{2}$

DIMOSTRO PER INDUZIONE $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$

QUANDO HO UN'INSIEME DI FRASI A OGNUNA DELLE QUALI CORRISPONDE UN NUMERO NATURALE ≥ 0

$3 \longrightarrow \frac{3\cdot 4}{2} = 6$

1) ϕ_1 VERA

2) SE ϕ_K VERA, ϕ_{K+1} VERA

1) $\sum_{i=1}^{1} i = \frac{1(1+1)}{2} = 1$ ϕ_1 VERA

2) $\sum_{i=1}^{K+1} i = \frac{(K+1)(K+2)}{2}$ ϕ_{K+1} VERA

$= \sum_{i=1}^{K} i + (K+1)$ ✓

$= \frac{K(K+1)}{2} + (K+1) = \frac{K(K+1)+2(K+1)}{2} = \frac{(K+1)(K+2)}{2}$

$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$

ϕ_1: $n=1 \quad \sum_{i=1}^{1} i = \frac{1(2)}{2} = 1$ ✓

ϕ_{n+1}: $\sum_{i=1}^{n+1} i = \frac{(n+1)(n+2)}{2} = \sum_{i=1}^{n} i + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1)$

VERO? ✓ $= \frac{(n+2)(n+1)}{2}$ ✓

$\left[\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2\right]$

$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

$1 = \frac{2\cdot 3}{6}$ ✓

$\sum_{i=1}^{n+1} i^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$

$= \sum_{i=1}^{n} i^2 + (n+1)^2$ ✓

$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2$

$= \frac{n(n+1)(2n+1)+6(n+1)^2}{6}$

$= \frac{n(2n^2+n+2n+1)+6n^2+12n+6}{6}$

$= \frac{2n^3+n^2+2n^2+n+6n^2+12n+6}{6}$

$= \frac{2n^3+9n^2+13n+6}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$ ✓

EX

PERCHÉ $a \cdot 0 = 0$?

PERCHÉ $(-1)\cdot(-1) = 1$?

PERCHÉ L'OPPOSTO È UNICO ?

PERCHÉ L'OPPOSTO DI $a \in \mathbb{R}$ È $(-1)a$?

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

VALORE ASSOLUTO $a \in \mathbb{R}$, $|a| = \max\{a, -a\}$

$$|a| = \begin{cases} a & a \geq 0 \\ -a & a \leq 0 \end{cases}$$

SE $a \leq 0$ ALLORA $-a \geq 0$

$|a| = 0$ SE E SOLO SE $a = 0$

$|a\cdot b| = |a|\,|b|$

$|a+b| \leq |a|+|b| \longrightarrow -a \leq |a|$

$-b \leq |b|$

$a+b \leq |a|+|b|$

$-(a+b) \leq |a|+|b|$

QUINDI $|a|+|b| \geq \max\{(a+b), -(a+b)\}$

$1+a+a^2+\dots a^n = \frac{a^{n+1}-1}{a-1} \quad \forall a \neq 1$

DIMOSTRO

$(a-1)(1+a+a^2+\dots a^n) = a^{n+1}-1$

$a+a^2+a^3+\dots a^n+a^{n+1}$

$-1-a-a^2-a^3-\dots-a^n$

OPPURE $1+a+a^2+\dots a^n = S$

$aS = a+a^2+\dots a^n+a^{n+1}$

$= S-1+a^{n+1}$

$S(a-1) = a^{n+1}-1 \quad S = \frac{a^{n+1}-1}{a-1}$

DISUGUAGLIANZA DELLE MEDIE

$a_1, a_2 \dots a_n \in \mathbb{R}$

$M_A = \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{n}$ $\quad M_g = \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} a_i}$ GEOMETRICA, $n' \geq 0$

$n = M_g$ SE I NUMERI SONO TUTTI UGUALI

$M \geq M_g$ SE $N' \geq 0$

DIMOSTRO

$n = 1 \quad M = M_g$

$n = 2 \quad \sqrt{a_1 a_2} \leq \frac{1}{2}(a_1 + a_2)$

$4 a_1 a_2 \leq (a_1 + a_2)^2$

$(a_1 + a_2)^2 - 4 a_1 a_2 = a_1^2 + a_2^2 - 2 a_1 a_2 \overset{!}{=} (a_1 - a_2)^2 \geq 0$ ✓

$\sum_{i=1}^{n} = n\, a_{n+1}$

SUPPONGO CHE: $a_{n+1} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i$

$M_A(a_1, \dots a_n, a_{n+1}) = \frac{1}{n+1}\left(\sum_{i=1}^{n+1} a_i\right) = \frac{1}{n+1}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i\right) = \frac{1}{n+1}\left(1 + \frac{1}{n}\right)\sum_{i=1}^{n} a_i = \frac{1}{n+1}\frac{n+1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i = M_A(a_1, \dots, a_n)$

SE $a_{n+1} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i$ LA MEDIA ARITMETICA NON CAMBIA AGGIUNGENDO a_{n+1}

SIA $a_4 = \frac{1}{3}(a_1 + a_2 + a_3)$

$= \frac{1}{4}(a_1 + \dots a_4) \geq \sqrt[4]{a_1 a_2 a_3 a_4}$

$a_4^4 \geq a_1 a_2 a_3 a_4$

$a_4^3 \geq a_1 a_2 a_3 \qquad a_4 = \frac{1}{3}(a_1 a_2 a_3)$

$n = 3$

$\frac{1}{n+1}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i + a_{n+1}\right)$

$= \frac{1}{n+1}\left(n a_{n+1} + a_{n+1}\right) = \frac{n+1}{n+1} a_{n+1} = a_{n+1}$

METODO GENERALE PER LA DIMOSTRAZIONE

1) $n = 2$ ✓
2) SE VALE PER n NUMERI, VALE PER $2n$ NUMERI
3) SE VALE PER $n+1$ NUMERI, VALE PER n NUMERI

2.

$M_g(a_1 \dots a_{2n}) = \sqrt{M_g(a_1 \dots a_n)\, M_g(a_{n+1} \dots a_{2n})} \leq \frac{1}{2}\left(M_g(a_1 \dots a_n) + M_g(a_{n+1} \dots a_{2n})\right) \leq \frac{1}{2}\left(M(a_1 \dots a_n) + M(a_{n+1} \dots a_{2n})\right) = M(a_1 \dots a_{2n}) =$

$= \sqrt[2n]{a_1 a_2 \dots a_{2n}} = \sqrt{\sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}\sqrt[n]{a_{n+1} \dots a_{2n}}}$

3. SCELGO a_{n+1}

$M(a_1 \dots a_n) = a_{n+1} = M(a_1 \dots a_{n+1}) \geq M_g(a_1 \dots a_{n+1}) = \sqrt[n+1]{a_1 a_2 \dots a_n a_{n+1}}$

$a_{n+1}^{n+1} \geq a_1 a_2 \dots a_n a_{n+1}$

$a_{n+1}^{n} \geq a_1 a_2 \dots a_n$

$M(a \dots a_n) = a_{n+1} \geq \sqrt[n]{a_1 \dots a_n} = M_g(a_1 \dots a_n)$

EX/ TROVARE UNA COSTANTE $C \in \mathbb{R} \mid \forall n \in \mathbb{N}, \sqrt[n]{n} \leq C$

$1, \sqrt{2}, \sqrt[3]{3}, \sqrt[4]{4} \dots \sqrt[n]{n} \leq C \qquad C = 1$

$f(x) = \sqrt[x]{x} = x^{\frac{1}{x}}$

$f'(x) = x^{\frac{1}{x}\,'} = \frac{1}{x} x^{\frac{1-x}{x}}\left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{x^{\frac{1-x}{x}}}{x^3}$ NO

$f'(x) = e^{\ln x^{\frac{1}{x}}\,'} = e^{\frac{1}{x}\ln x\,'} = e^{\frac{1}{x}\ln x}\left(\frac{1}{x}\ln x\right)'$

$= x^{\frac{1}{x}}\left(-\frac{1}{x^2}\ln x + \frac{1}{x}\frac{1}{x}\right)$

$= x^{\frac{1}{x}}\left(\frac{1}{x^2}(1 - \ln x)\right)$

$= \frac{x^{\frac{1}{x}}}{x^2}(1 - \ln x) = x^{\frac{1}{x}-2}(1 - \ln x)$ ✓

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

MAGGIORANDO

$f'(x) > 0$ FA > 0 $x > 0$

FL > 0 $\ln x < 1$

$0 < x < e$

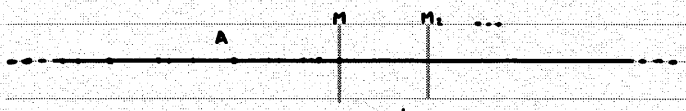


✓

SIA $A \subseteq \mathbb{R}$ UN INSIEME DI NUMERI, È LIMITATO SUPERIORMENTE

$\exists\, m \in \mathbb{R} \mid \forall a \in A \quad a \leq M$ → COSA LIMITA A? M È UN MAGGIORANTE DI A, $[\forall n > M \quad n > A]$

$\mathbb{R}$ SI RAPP. COME RETTA



A HA MASSIMO ELEMENTO m SE: $\exists\, m \in A \mid \forall a \in A \quad a \leq m$

↳ UNICO, È ANCHE UN MAGGIORANTE DI A EX/ m, m' MAX → $m \leq m'$, $m' \leq m$ QUINDI $m = m'$

↳ IL PIÙ PICCOLO, MA SE NON AMMETTE MASSIMO, MA È LIMITATO SUPERIORMENTE, ESISTE IL SUP

MINIMO MAGGIORANTE

EX/ $A = \{1, \sqrt{2}, \sqrt[3]{3}, \sqrt[4]{4} \dots \sqrt[n]{n}\}$ ALTRA NOTAZIONE $\{\sqrt[n]{n} : n \in \mathbb{N}^+\}$

$\sqrt[n]{n} \leq 2$

RENDO $\sqrt[n]{n}$ MEDIA GEOMETRICA, QUINDI I TERMINI SONO TUTTI UGUALI A 1 MANNE $a_1 = n$ → $n, 1, 1, 1 \dots 1$ $\quad M_g = \sqrt[n]{n \cdot 1 \cdots 1} = \sqrt[n]{n}$

$a_1 = n \quad a_2 = a_3 = \dots = a_n = 1$ QUINDI $M_g \leq M_a$ $\quad \sqrt[n]{n} \leq \frac{1}{n}(2n-1) \leq 2$ 2 MAGGIORANDO $\quad M_A = \frac{2n+1}{n}$

SOMMA $= n-1$

SOMMA $= n+n-1$

$\frac{2n-1}{n} < 2$ PERCHÉ $\frac{2n}{n} = 2$

EX/ INSIEME LIMITATO SUP. MA SENZA MASSIMO

$B = \left\{\frac{n}{n+1} : n \in \mathbb{N}\right\} = \left\{\frac{0}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots\right\}$ $\quad \frac{n}{n+1} \leq 1 \longrightarrow n \leq n+1$

$C =]1,2[= \{x \in \mathbb{R} : 1 < x < 2\}$ C MAGGIORATO DA 2 PER DEFINIZIONE

SE $c \in C$ $1 < c < 2$ → $\frac{c+2}{2}$ $\quad 1 < c < \frac{c+2}{2} < 2$

$\frac{n}{n+1} < \frac{n+1}{n+2}$

$n(n+2) < (n+1)^2$

$n^2 + 2n < n^2 + 2n + 1$ ✓

$D = \left\{1, 1+\frac{1}{2}, 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}, \dots\right\} = \left\{\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{2^i} : n \in \mathbb{N}\right\}$ 2 È UN MAGGIORANTE

DIMOSTRO



RESTA SEMPRE MINORE DI 2 (PARADOSSO DI ZENONE)

$\sum_{i=0}^{n} a^i = \frac{a^{i+1}-1}{a-1} = \frac{1-a^{i+1}}{1-a}$ $\quad \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{2^i} = \frac{1-\frac{1}{2^{n+1}}}{1-\frac{1}{2}} = 2\left(1 \cdot \frac{1}{2^{n+1}}\right) = 2 - \frac{2}{2^{n+1}} = 2 - \frac{1}{\frac{2^{n+1}}{2}} = \underbrace{2 - \frac{1}{2^n}}_{<2\ \forall n}$ ✓

$D = \left\{1, 1+\frac{1}{2}, 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}, \dots\right\} = \left\{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} : n \in \mathbb{N}^+\right\}$ NON È LIMITATO!

$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} > 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 2$

$1 + \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) > 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 + \frac{3}{2}$

$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots \frac{1}{2^n} \geq 1 + \frac{n}{2}$

PRENDO SOLO LE POTENZE DI 2, È SUFFICIENTE

$\sum_{i=1}^{2^n} \frac{1}{i} > 1 + \frac{n}{2}$ DIMOSTRO PER INDUZIONE

$\sum_{i=1}^{2^0} \frac{1}{i} = 1 \geq 1 + \frac{0}{2} = 1$ ✓ $\quad \sum_{i=1}^{2^n} \frac{1}{i} \geq 1 + \frac{n}{2} \longrightarrow \sum_{i=1}^{2^{n+1}} \frac{1}{i} = \underbrace{\sum_{i=1}^{2^n} \frac{1}{i}}_{\geq 1+\frac{n}{2}} + \underbrace{\sum_{i=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{1}{i}}_{\geq 1 + \frac{n}{2} + 2^n \frac{1}{2^{n+1}}}$ $\quad$ TRA 2^n+1 E 2^{n+1} CI SONO 2^n NUMERI

$= 1 + \frac{n}{2} + \frac{1}{2} = 1 + \frac{n+1}{2}$ ✓

2^n TERMINI, TUTTI $> \frac{1}{2^{n+1}}$

$\sum_{i=n}^{m} a_i \longrightarrow m - n + 1$ ADDENDI

$a_n \{ a_{n+1}, a_{n+2} \dots a_m$ $\quad n+(m-n)$

$m-n+1$ $\quad a_1$

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745