# CAMPI ELETTROMAGNETICI

**Def. CAMPO:**

dato un fenomeno fisico associato ai punti di una determinata regione dello spazio, è la descrizione matematica di come tale grandezza vari da un punto all'altro nel tempo.

- Scalare (pressione, temperatura...)
- Vettoriale (campo gravitazionale...)
- Statico (non varia nel tempo)
- Dinamico

→ Operatori differenziali

1) Gradiente di un campo scalare

Data $\varphi(x,y,z)$ funzione scalare:

$$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y}dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z}dz$$ → Variazione infinitesima $d\varphi$ di $\varphi$

$\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ derivata parziale di $\varphi$ rispetto a x (considero y e z costanti)

$$d\underline{\ell} = dx\cdot \underline{i}_x + dy\cdot \underline{i}_y + dz\cdot \underline{i}_z$$ → Vettore distanza infinitesimo $d\underline{\ell}$

$$d\varphi = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\underline{i}_x + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\underline{i}_y + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\underline{i}_z\right) d\underline{\ell} = \underline{\nabla}\varphi \cdot d\underline{\ell} = |\underline{\nabla}\varphi|\, d\ell \cos\alpha$$

Gradiente di $\varphi$ = descrive come varia una funzione in seguito allo spostamento $d\underline{\ell}$

$$\underline{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\underline{i}_x + \frac{\partial}{\partial y}\underline{i}_y + \frac{\partial}{\partial z}\underline{i}_z$$

- → il gradiente ha la stessa direzione della max variazione di $d\varphi$
- → spostandosi perpendicolarmente a $\underline{\nabla}\varphi$, $\alpha = \pi/2 \Rightarrow d\varphi = 0$, quindi $\varphi$ rimane costante
- → $\underline{\nabla}\varphi$ è $\perp$ alle superfici a $\varphi$ costante e diretto verso curve di livello crescente

Proprietà del gradiente:

$\underline{\nabla}(a\varphi + bg) = a\underline{\nabla}\varphi + b\underline{\nabla}g$ (con a, b coefficienti) → Linearità

$\underline{\nabla}(uv) = u\underline{\nabla}v + v\underline{\nabla}u$ (u, v funzioni scalari)

$\underline{\nabla}(u/v) = (v\underline{\nabla}u - u\underline{\nabla}v)/v^2$

$$\int_a^b d\varphi = \varphi(b) - \varphi(a) = \int_a^b \underline{\nabla}\varphi \cdot d\underline{\ell}$$

→ Essendo $d\varphi$ un differenziale esatto, l'integrale di linea non dipende dal cammino scelto, ma solo da a e b.

Un campo vettoriale che può essere descritto come gradiente di una funzione scalare è detto CONSERVATIVO.

$$\nabla\Psi = \frac{\partial\Psi}{\partial\rho}\underline{i}_\rho + \frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial\Psi}{\partial\phi}\underline{i}_\phi + \frac{\partial\Psi}{\partial z}\underline{i}_z \quad \text{(coordinate cilindriche)}$$

$$\nabla\Psi = \frac{\partial\Psi}{\partial r}\underline{i}_r + \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial\Psi}{\partial\vartheta}\underline{i}_\vartheta + \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial\Psi}{\partial\phi}\underline{i}_\phi \quad \text{(coordinate sferiche)}$$

coefficiente metrico

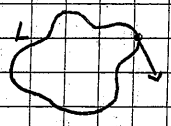
2) Rotore di un campo vettoriale

$$\nabla\times\underline{A} = \det\begin{vmatrix} \underline{i}_x & \underline{i}_y & \underline{i}_z \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} =$$

$$= \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\underline{i}_x + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\underline{i}_y + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\underline{i}_z$$

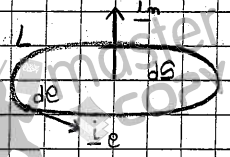
Def. CIRCUITAZIONE: integrale di linea esteso a un percorso chiuso.

$$C = \oint_L \underline{A}\cdot d\underline{\ell}$$




Il rapporto tra la circuitazione e l'area sottesa dal percorso chiuso dà la corrispondente componente del vettore

$$\underline{i}_n \cdot \nabla\times\underline{A} = \lim_{dS\to 0}\frac{1}{dS}\oint_L \underline{A}\cdot d\underline{\ell}$$




necessario per ottenere una forma indipendente dalla circonferenza

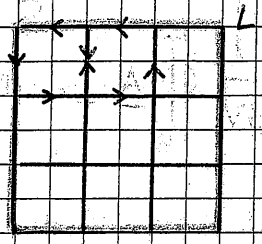
$dL \to 0 \Rightarrow dS \to 0$ La circonferenza collassa in un punto

→ Teorema di Stokes

$$\iint_S (\nabla \times \underline{A}) \cdot \underline{i}_n \, dS = \oint_L \underline{A} \cdot \underline{i}_\ell \, d\ell$$

Flusso del rotore

$$\nabla \times \underline{A} \cdot \underline{i}_n \cdot dA_i = \oint_{dL_i} \underline{A} \cdot \underline{i}_\ell \, d\ell$$




I contributi di celle adiacenti si annullano

$$\sum_{i=1}^{N} \nabla \times \underline{A} \cdot \underline{i}_n \, dA_i = \sum_{i=1}^{N} \oint_{dL_i} \underline{A} \cdot \underline{i}_\ell \, d\ell$$

$dA_i \to 0$

$$\iint_S (\nabla \times \underline{A}) \underline{i}_n \, dS = \oint_L \underline{A} \cdot \underline{i}_\ell \, d\ell$$

→ Il rotore di un gradiente è sempre nullo

$$\nabla \times (\nabla g) = 0$$

Infatti, per il teorema di Stokes:

$$\iint_S (\nabla \times (\nabla g)) \cdot \underline{i}_n \, dS = \oint_L \nabla g \cdot \underline{i}_\ell \, d\ell = 0$$

Un campo il cui rotore è nullo è detto IRROTAZIONALE.

Dato $\underline{a}$, t.c. $\nabla \times \underline{a} = 0 \to \underline{a} = \nabla g$

Ammette cioè potenziale scalare $g \to$ è CONSERVATIVO

→ Proprietà del rotore:

$$\nabla \times (\underline{a} + \underline{b}) = \nabla \times \underline{a} + \nabla \times \underline{b}$$

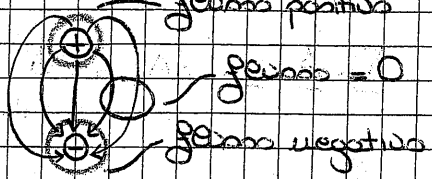
$$\nabla \times (g \underline{a}) = g \nabla \times \underline{a} + (\nabla g) \times \underline{a}$$ ($g$ campo scalare, $\underline{a}$ campo vettoriale)

3) Divergenza di un campo vettoriale

$$\underline{\nabla}\cdot\underline{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

Considero un punto P, racchiuso da una sfera di volume dV e area dS. La divergenza equivale al flusso per unità di volume:

$$\underline{\nabla}\cdot\underline{A} = \lim_{dV\to 0} \frac{1}{dV} \oiint_S \underline{A}\cdot\underline{i}_n \cdot dS$$

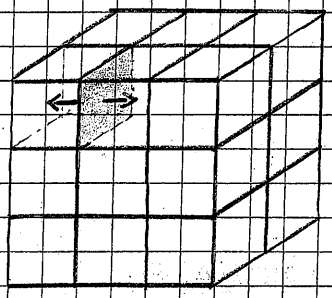



La divergenza può essere vista come un rilevatore di sorgente del campo elettrostatico.

↳ ci dice punti in cui il flusso è $\neq 0$ si hanno in corrispondenza delle cariche

→ Teorema di Gauss-Green

$$\iiint_V \underline{\nabla}\cdot\underline{A}\, dV = \oiint_S \underline{A}\,\underline{i}_n\, dS$$




Divido V in celle infinitesime

→ essendo le normali alle superfici opposte i contributi di facce adiacenti si elidono

$$\sum_{i=1}^{N} \underline{\nabla}\cdot\underline{A}\, dV_i = \sum_{i=1}^{N} \oiint_{S_i} \underline{A}\cdot\underline{i}_n\, dS$$

→ La divergenza di un rotore è nulla

$$\underline{\nabla}\cdot(\underline{\nabla}\times\underline{A}) = 0$$

Un campo la cui divergenza è nulla è detto SOLENOIDALE

Dato $\underline{b}$ t.c. $\underline{\nabla}\cdot\underline{b} = 0 \Rightarrow \underline{b} = \underline{\nabla}\times\underline{g}$

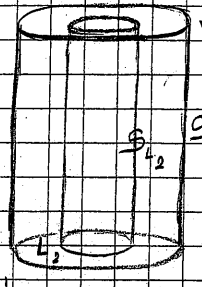
Annulla cioè potenziale vettore $\underline{g}$

$$\iiint_V \underline{\nabla}\cdot(\underline{\nabla}\times\underline{a})\, dV = \oiint_{S_L} \underline{\nabla}\times\underline{a}\cdot\underline{i}_n\, dS = \iint_{S_{L_1}+S_{L_2}} \underline{\nabla}\times\underline{a}\,\underline{i}_n\, dS =$$

($S_{L_2}$: superficie aperta, diventa chiusa per $L_2 \to 0$)

$$= \oint_{L_2} \underline{a}\cdot\underline{i}_{e_2}\, de = 0 \quad \to L_2 \to 0$$

(Stokes)



→ Proprietà della divergenza:

$$\underline{\nabla}\cdot(\underline{a}\times\underline{b}) = \underline{b}\cdot(\underline{\nabla}\times\underline{a}) - \underline{a}(\underline{\nabla}\times\underline{b})$$

$$\underline{\nabla}(\varphi\underline{a}) = (\underline{\nabla}\varphi)\cdot\underline{a} + \varphi(\underline{\nabla}\cdot\underline{a})$$

$$\underline{\nabla}(a+b) = \underline{\nabla}\cdot\underline{a} + \underline{\nabla}\cdot\underline{b}$$

→ Teorema di Helmholtz.

Qualunque campo può essere scritto come somma di una componente irrotazionale e di una solenoidale:

$$\underline{a} = \underline{a}_i + \underline{a}_s$$

4) Operatore di Laplace (o Laplaciano)

Sia $\varphi$ una funzione scalare:

$$\nabla^2\varphi = \underline{\nabla}\cdot(\underline{\nabla}\varphi) = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} \rightarrow \text{Scalare}$$

Equazione di Laplace: $\nabla^2\varphi = 0$ ($\varphi$ è una funzione armonica)

→ Laplaciano vettoriale:

$$\nabla^2\underline{a} = \underline{\nabla}\cdot(\underline{\nabla}\cdot\underline{a}) - \underline{\nabla}\times(\underline{\nabla}\times\underline{a}) \rightarrow \text{Vettore}$$

$$= (\nabla^2 a_x)\underline{i}_x + (\nabla^2 a_y)\underline{i}_y + (\nabla^2 a_z)\underline{i}_z$$

# EQUAZIONI DI MAXWELL

Possono essere espresse in 2 forme $\begin{cases} \text{differenziale} \\ \text{integrale} \end{cases}$

Incognite:

$\underline{e}(\underline{x}, t)$ [V/m] Campo elettrico

$\underline{h}(\underline{x}, t)$ [A/m] Campo magnetico

$\underline{d}(\underline{x}, t)$ [C/m²] Campo di induzione elettrica (vettore densità di flusso elettrico)

$\underline{b}(\underline{x}, t)$ [Wb/m²] Campo di induzione magnetica (vettore densità di flusso magnetico)

Questi vettori, definiti in tutto lo spazio, soddisfano in modo univoco le equazioni di Maxwell, quando sono specificate le condizioni iniziali e al contorno.

→ Le cariche libere e le correnti sono le sorgenti del campo.