28/9

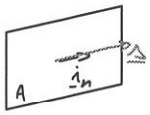
Giuliano Manara

Circuiti a parametri concentrati —> circuiti a parametri distribuiti
- **Concentrati**: se le dimensioni del circuito sono maggiori di λ/20 con λ intesa come lunghezza d'onda
- **Distribuiti**: se le dimensioni del circuito sono minori di λ/20 (alte frequenze)

Esame: scritto, è possibile portare il formulario all'esame
- 3 es in 3h se in presenza (onde e campi, antenne, linee trasmissioni e propagazione dati)
- Online: test attitudinale (crocette, serve solo per noi, si passa anche con insuff) —> all'orale es pratici e se tutto ok domande teoriche

Libri
- Appunti di campi elettromagnetici (il campano)
- C.A. Balanis Advanced Engeneering Electromagnetics

Sistemi di riferimento per calcoli di flusso e integrali di volume
- **Vettore di Poynting:** è definito come una densità di potenza istantanea (Watt/m^2) e si calcola come prodotto vettoriale del campo elettrico E e del campo magnetico H



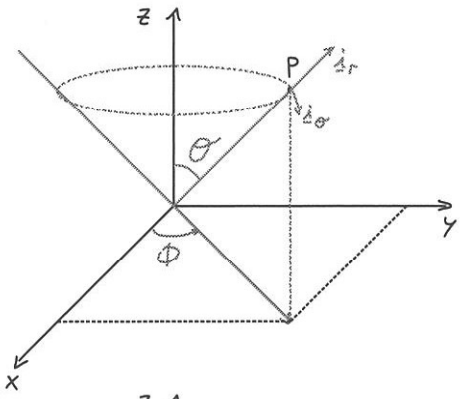
$\hat{i}_n$ = normale alla superficie

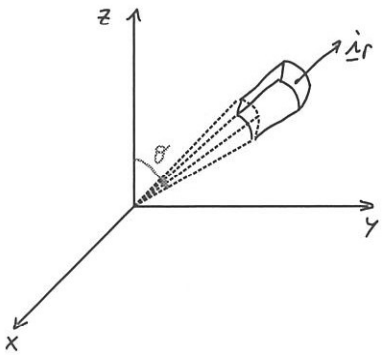
$\int_A \underline{\Delta} \cdot \hat{i}_n \, dS$

Un punto generico sul piano cartesiano lo posso vedere come intersezione di tre piani (x, y, z)

Regola: per tutte le terne vale la legge della "mano destra" (terna destrorsa)

Coordinate sferiche: la terna riferita ad un punto P sarà composta da (r, θ, ϕ)
- r: raggio del punto P rispetto all'origine
- θ: fa riferimento alla superficie laterale di un cono con vertice nell'origine e angolo di apertura θ
- ϕ: fa riferimento al semipiano della stella di asse z che passa per il punto P





$dS_r = r \sin\theta \, d\theta \, r \, d\phi$

$dV = dr \cdot r \cdot \sin\theta \, d\theta \, r \, d\phi = r^2 \sin\theta \, dr \, d\theta \, d\phi$

SAR = Specific Absorption Rate || Coef. di assorbimento

Calcolo vettoriale: prodotto scalare e vettoriale

$\underline{A} \cdot \underline{B} = AB \cos\alpha$ || Risultato è uno scalare ed è commutativo ($\underline{A} \cdot \underline{B} = \underline{B} \cdot \underline{A}$)

$\underline{A} \wedge \underline{B} = \underline{C}$ || Risultato è un vettore e non è commutativo ($\underline{A} \wedge \underline{B} \neq \underline{B} \wedge \underline{A}$); vale la regola della mano Dx

$\underline{A} \wedge \underline{B} \cdot \underline{D}$ || si può fare anche un prodotto misto

$= (\underline{A} \wedge \underline{B}) \cdot \underline{D} = \det \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ D_x & D_y & D_z \end{vmatrix} = \underline{D} \wedge \underline{A} \cdot \underline{B}$ (se vario ciclicamente le righe il det rimane lo stesso)

CAMPI

- **Campo**: implica l'associazione ad un certo volume di spazio, quando parlo di campo quindi devo dire dove si localizza il campo
  - Campi scalari e vettoriali
  - Campi statici e dinamici: fa riferimento all'andamento dei campi rispetto al tempo

Studiare un campo elettromagnetico: associo lo studio ad un certo volume

Gradiente: operatore che agisce su un campo scalare (su x, y, z ed eventualmente nel tempo t) e da come risultato un vettore

- Ipotizzo di partire da un punto (x, y, z) e mi sposto in un punto molto vicino a questo (vicino di una quantità infinitesima)

master COPY

- Come cambia il campo passando tra i due punti?
  Di una quantità differenziale che chiamo df

(x, y, z) — $d\underline{l}$ — $(x+dx, y+dy, z+dz)$

↳ $df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz$ → Funz. scalare $\rightarrow f(x, y, z)$

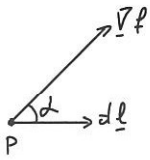
$d\underline{l} = dx\,\underline{i}_x + dy\,\underline{i}_y + dz\,\underline{i}_z$ || ho definito il vettore spostamento

→ Definisco ora l'operatore GRADIENTE della funzione "f", in particolare l'operatore $\underline{\nabla}$

$$\underline{\nabla} \equiv \frac{\partial}{\partial x}\underline{i}_x + \frac{\partial}{\partial y}\underline{i}_y + \frac{\partial}{\partial z}\underline{i}_z$$ Gradiente

master COPY COPISTERIA

$\underline{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial x}\underline{i}_x + \frac{\partial f}{\partial y}\underline{i}_y + \frac{\partial f}{\partial z}\underline{i}_z$ ma $df = \underline{\nabla} f \cdot d\underline{l} = \nabla f \cdot dl \cos(\alpha)$

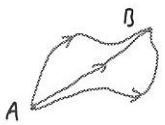


→ $df = 0$ se $\alpha = 0$ ⇒ il gradiente dipende dallo spazio 3D, è come una derivata nello spazio ed è utile per determinare minimi e massimi

→ Il gradiente possiede anche tutte le proprietà della derivata

- $\underline{\nabla}(f+g) = \underline{\nabla} f + \underline{\nabla} g$
- $\underline{\nabla}(uv) = u\underline{\nabla} v + v\underline{\nabla} u$
- $\underline{\nabla}(u/v) = \frac{v\underline{\nabla} u - u\underline{\nabla} v}{v^2}$

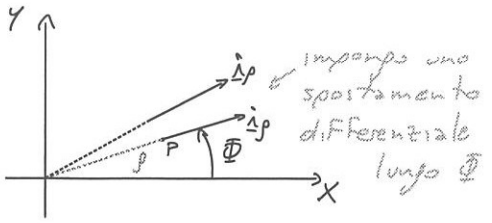
master COPY



- $\int_A^B df = f(B) - f(A) = \int_A^B \underline{\nabla} f \, d\underline{l}$ || mi dà il solito risultato ∀ percorso → dallora il campo in questo caso è conservativo (es: campo elettrostatico)

↑ esprimo il campo come gradiente di una funzione potenziale (gradiente potenziale)

→ Nel caso di coordinate cilindriche si complica il tutto



→ se derivo rispetto a Φ devo derivare anche il versore

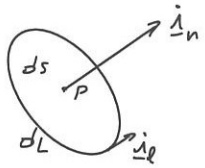
coef metrico

quindi in coordinate cilindriche: $\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r}\underline{i}_r + \frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial \Phi}\underline{i}_\Phi + \frac{\partial f}{\partial z}\underline{i}_z$

mentre in coordinate sferiche: $\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r}\underline{i}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \vartheta}\underline{i}_\vartheta + \frac{1}{r\,\mathrm{sen}\,\vartheta}\frac{\partial f}{\partial \Phi}\underline{i}_\Phi$

ROTORE di un campo vettoriale: opera su un vettore e da come risultato un altro vettore

- Ipotizzo di avere un punto P e di scegliere un versore rispetto al quale traccio un'area infinitesima ds che è racchiusa da un percorso chiuso infinitesimo dL. Definisco poi un versore dl tangente alla circonferenza che rispetta la regola della mano Dx il



$\underline{A} = \underline{A}(x, y, z)$

$C = \oint_{dL} \underline{A}\cdot\underline{i}_l\, dl$

Definisco il rotore a partire dalle sue componenti, ad esempio in coordinate (x, y, z)

$\nabla \wedge \underline{A}$ = vettore

DeFinisco ROTORE un vettore la cui componente rispetto a $\underline{i}_n$ è data da:

$$\underline{i}_n \cdot \nabla \wedge \underline{A} = \lim_{ds\to 0} \frac{\oint_{dL} \underline{A}\cdot\underline{i}_l\, dl}{ds}$$

Normalizzo rispetto a ds perché per l'integrale al numeratore quando ds tende a 0 si ha che il percorso dL tende a coincidere con il centro della circonferenza, invece io voglio che valga per ogni ds —> se normalizzo con ds ottengo che per ds—>0 il numeratore e il denominatore vanno a 0 ma il limite è finito

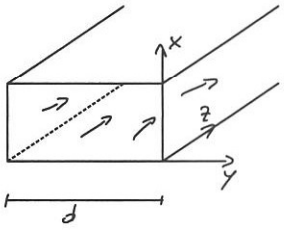
→ lo scrivo in un altro modo

$$\nabla \wedge \underline{A} = \begin{vmatrix} \underline{i}_x & \underline{i}_y & \underline{i}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = \underline{i}_x\left[\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right] - \underline{i}_y\left[\frac{\partial A_z}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial z}\right] + \underline{i}_z\left[\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right]$$ Rotore

Esprimo il rotore in coordinate cilindriche

$$\nabla \wedge \underline{A} = \left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial A_z}{\partial \Phi} - \frac{\partial A_\Phi}{\partial z}\right]\underline{i}_\rho + \left[\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho}\right]\underline{i}_\Phi + \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho A_\Phi) - \frac{\partial A_\rho}{\partial \Phi}\right]\underline{i}_z$$

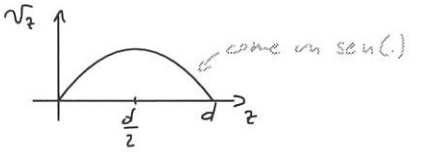
Esempio: ipotizzo di avere un canale che serve a convogliare dell'acqua



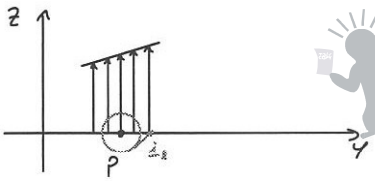
Ipotizzo di avere una ruota con 4 pale senza attrito intorno all'asse



La velocità lungo l'asse z ipotizzo abbia questo andamento



Se immergo la ruota parallela all'asse y allora ruota
Se la immergo parallelamente all'asse x ad un y compreso tra 0 e d/2



$C = \oint_{\partial L} \underline{v} \cdot \underline{\tau}_e \, dl > 0$ || si crea un vortice che segue la regola della mano DX

→ In questo caso ruota;

Il rotore si utilizza per determinare il vettore su un piano perpendicolare rispetto al piano sul quale è nota la componente del rotore

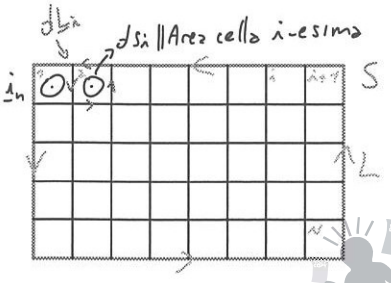
master COPY

29/9

ROTORE: circuitazione per unità di superficie

Teorema di Stokes

- Ipotizzo di avere una superficie macroscopica e la divido in tante piccole celle ("piccole" rispetto alla lunghezza d'onda). I campi sono costanti se mi sposto di quantità molto piccole; i campi invece variano se compio delle distanze apprezzabili (> λ). Su ogni quadratino devo prendere la normale e ipotizzo sia uscente dal foglio



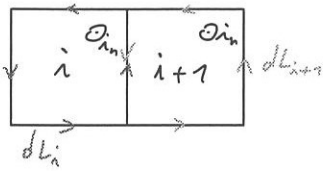
Applico la definizione di rotore ai singoli quadratini

$$\nabla \wedge \underline{A} \cdot \underline{i}_n \equiv \lim_{ds \to \emptyset} \frac{\oint_{dL} \underline{A} \cdot \underline{i}_\ell \, d\underline{\ell}}{ds}$$ ‖ Grazie al limite questa relazione vale per ogni ds

↓ elimino il lim (ds piccolo)

$\nabla \wedge \underline{A} \cdot \underline{i}_n \, dS_i = \oint_{dL} \underline{A} \cdot \underline{i}_\ell \, d\underline{\ell}$ → sommo membro a membro tutti i termini ∀ cella

$$\rightarrow \sum_{i=1}^{N} \nabla \wedge \underline{A} \cdot \underline{i}_n \, dS_i = \sum_{i=1}^{N} \oint_{dL_i} \underline{A} \cdot \underline{i}_\ell \, d\underline{\ell}$$



- Tutti i lati a comune con due celle danno contributo nullo alla sommatoria —> danno contributo solo i lati esterni, cioè quelli che appartengono al confine laterale della superficie S (rosso)
- Analizzo il primo membro, ricordo che vale la condizione di limite e quindi N—>inf => la sommatoria diventa un integrale di superficie

quindi

$$\iint_S \nabla \wedge \underline{A} \cdot \underline{i}_n \, dS = \oint_L \underline{A} \cdot \underline{i}_\ell \, d\underline{\ell}$$ Teo Stokes

‖ Il flusso attraverso S del rotore di A è uguale alla circuitazione sul percorso chiuso L su cui si appoggia S

Non è una circuitazione perché non calcolo l'integrale su una superficie chiusa

Utilizzo del teorema: ci serve per giustificare la legge di induzione magnetica di Farady-Lentz

- Si può utilizzare anche per trovare delle proprietà del rotore —> ipotizzo di avere un campo vettoriale che posso vedere come gradiente di una funzione scalare, cioè un vettore

$$\iint_S \nabla \wedge (\nabla f) \cdot \underline{i}_n \, dS = \oint_L \nabla f \, \underline{i}_\ell \, d\underline{\ell}$$ → $\oint \nabla f$ su un percorso chiuso L => il valore dipende solo dal punto di arrivo e da quello di partenza ma in questo caso coincidono => $\oint \nabla f = 0$

Allora:

$\nabla \wedge (\nabla f) = 0$ sempre ∀ S e L → il campo prende il nome di campo irrotazionale

Un campo che può essere espresso come gradiente di una funzione scalare è sempre irrotazionale (è un campo conservativo)

es:

Prendo B t.c. $\nabla \wedge \underline{B} = 0$ in un certo volume => posso scrivere B come: $B = \nabla u(x,y,z)$

Proprietà:

1) $\nabla \wedge (\underline{a} + \underline{b}) = \nabla \wedge \underline{a} + \nabla \wedge \underline{b}$
2) $\nabla \wedge (f \cdot \underline{a}) = f \nabla \wedge \underline{a} + (\nabla f) \wedge \underline{a}$