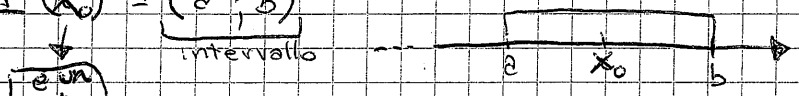
Topologia di $\mathbb{R}$ (descrive l'insieme dei numeri reali ($\mathbb{R}$))

L'Intorno (completo) è un qualsiasi intervallo (aperto) limitato che contiene x_0

$I(x_0) = (a ; b)$ intervallo



(intorno è tutti i numeri compresi tra a e b) — è un punto

δ = delta

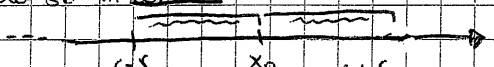
ε = epsilon

$\in$ = appartiene

Intorno circolare di x_0: dove x_0 sta in centro

$I_\delta(x_0) = (x_0 - \delta ; x_0 + \delta)$

per forza al centro deve essere $x_0 - \delta ; x_0 + \delta$



$-\delta$ e $+\delta$ sono uguali $(-\delta = +\delta = \delta)$

Es. $I_2(3) = (1 ; 5)$

si fa $3 - 2$ e fa 1

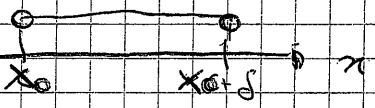
e $2 + 3 = 5$

pallino bianco = aperto

pallino nero = chiuso

Intorno dx di x_0

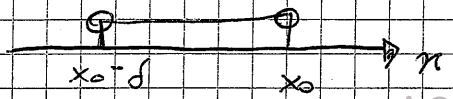
$I(x_0^+) = (x_0 ; x_0 + \delta)$



Es. $I_2(3^+) = (3 ; 5)$

Intorno Sinistro di x_0

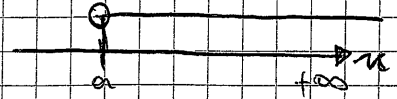
$I(x_0^-) = (x_0 - \delta ; x_0)$



Es. $I_2(3^-) = (1 ; 3)$

Intorno di $+\infty$

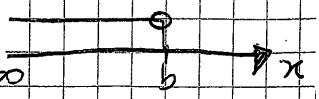
def $I_a(+\infty) = [a ; +\infty)$



oss $x \in I_a(+\infty) \iff x > a$

Intorno di $-\infty$

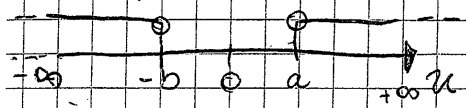
def: $I_b(-\infty) = (-\infty ; b]$ Es. $I_{-10}(-\infty) = (-\infty ; -10]$



oss: $x \in I_b(-\infty) \iff x \leq b$

Intorno dell'Infinito

$I(\infty) = I(-\infty) \cup I(+\infty)$



$\Leftrightarrow$ se e solo se

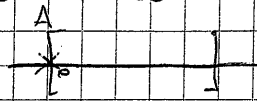
$\Leftarrow$ = negativo

OSSERVAZIONE: $x \in I(\infty) \Leftrightarrow x < -b$ e $x > a$

Punti di frontiera (sono estremi)

$A \subseteq \mathbb{R}$ $x_0 \in A$ è un punto interno di A

se $\exists I_{x_0} \subseteq A$



(deve essere sempre dentro e mezzo fuori)

$x_0 \in A$ è punto di frontiera di A se ogni I_{x_0} contiene sia punti di A sia punti che non appartengono ad A

es: $x = [3,5]$ Intervallo $x = (3,5)$ punti Front $x = \{3\} \cup \{5\}$

Punti interni

Un punto si dice interno all'insieme A quando appartiene ad A ed esiste un suo intorno completo contenuto in A ? = estremi

Insieme aperto e chiuso

X è un insieme aperto se tutti i suoi punti sono (interni)

es $(3,6)$; $(0,+\infty)$; $(-\infty,2)$ sono aperti

sono interni perché tutti i suoi punti sono aperti

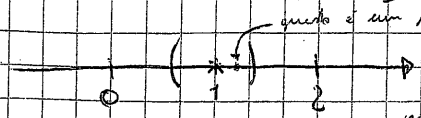
es $[3,6)$ non è aperto perché 3 non è un punto interno

PUNTO DI ACCUMULAZIONE

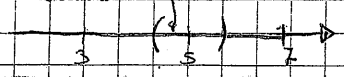
Consideriamo un insieme $A \subseteq \mathbb{R}$ e Diremo che $x \in \mathbb{R}$ è un punto di accumulazione per A se ogni intorno di x contiene almeno un elemento di A diverso da x stesso

(un punto x è di accumulazione per A se esiste sempre un punto di A (diverso da x) che è vicino quanto si vuole a x)

$A = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \le x \le ?\} \Rightarrow x = 1$

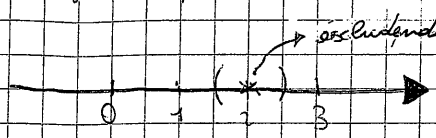


$B = (3,5) \cup (5,7)$ $x = 5$



PUNTO ISOLATO

Un punto c di un insieme numerico A, si dice isolato, se esiste almeno un intorno di c che non contenga altri punti di A



prendiamo l'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali (Es) $X = \{2\} \cup [3,4)$ punti di frontiera
(chiuso)

def: $x_0 \in X$ è un punto isolato se esiste almeno (bisogna) un $I_{x_0} \cap X = \{x_0\}$

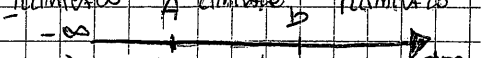
I punti isolati sono anche di frontiera $Fr(X) = \{2\} \cup \{3\} \cup \{4\}$

INTERVALLI LIMITATI E ILLIMITATI

X è un insieme limitato di $\mathbb{R}$ se esiste un I di centro l'ORIGINE che lo contiene

INTERVALLO → LIMITATO ⟷ CHIUSI (ESTREMI COMPRESI)
→ APERTI (ESTREMI ESCLUSI)
→ ILLIMITATO → superiormente → CHIUSO (ESTREMI COMPRESI)
→ APERTO (ESTREMI ESCLUSI)
→ inferiormente → CHIUSO (ESTREMI COMPRESI)
→ APERTO (ESTREMI ESCLUSI)

INTERVALLI



$x < a$ $(-\infty, a)$ | $a < x < b$ (a,b) | $x > b$ $(b; +\infty)$

C = contenuto
$\leq x \leq$ = compreso

(Es) Intervalli di $\mathbb{R}$ $a, b \in \mathbb{R}$ $a < b$

(a,b) aperto limitato (perché ci sono dei numeri e non ∞ / quindi è limitato)

$[a,b]$ chiuso limitato compatto

$(a; +\infty)$; $(-\infty, a)$ aperti illimitati

$[a; +\infty)$; $(-\infty; a]$ chiusi illimitati

$[a; b)$ né aperti né chiusi
$(a; b]$ né aperti né chiusi
} limitati

INSIEME COMPATTO

$X \in \mathbb{R}$ è un insieme compatto se è chiuso e limitato

FUNZIONE

Una funzione in generale è: Dati A e B insiemi ($f: A \to B$) è una funzione se e solo se ad ogni elemento di A è associato uno e uno solo di B

(a A corrisponde un B)

$\forall a \in A \; \exists \; b \in B$ tale che $f: a \to b$

A → dominio e B codominio.

Def di funzione mediante un'espressione analitica

$f: x \to y \quad , y = f(x)$

la x è la variabile indipendente mentre la y è la variabile dipendente (cioè dipende dai valori che diamo alla x)

FUNZIONI REALI A VARIABILE REALE

- L'insieme di definizione A è un sottoinsieme dell'insieme dei numeri reali $\mathbb{R}$, che eventualmente può coincidere con esso (funzione di variabile reale). Gli elementi del dominio prendono preso il nome di punti.

- L'insieme di arrivo B, cioè il codominio, è l'insieme dei numeri reali $\mathbb{R}$ (funzione reale o funzione a valori reali)

$A \subseteq \mathbb{R}$, $B = \mathbb{R}$ e $f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

(N.B.) Deve valere sempre la stessa regola: non è possibile avere una funzione che a un valore del dominio associ due o più elementi del codominio.

(ES) - funzione identità: $f(x) = x$ [dato un numero reale x lo restituisce ordinando lo a quello]

- funzioni lineari: $f(x) = 3x + 2$ [il loro grafico corrisponde a quello di una retta]

- funzione non definita sull'insieme dei numeri reali:

$f(x) = \frac{x^2}{x+2}$ [essendo infatti in presenza di un denominatore per individuare il dominio o dobbiamo escludere i valori che lo annullano: non si può dividere $\times 0$].

Per valutare una funzione reale di variabile reale in un punto basta sostituire al posto della variabile indipendente (x) il valore del punto in cui si vuole valutare la funzione.

1) f. identità

$f(x) = x$ nei punti $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$ $\Rightarrow$ $f(0) = 0$; $f(1) = 1$; $f(2) = 2$

2) f. lineari

$f(x) = 3x + 2$ nei punti $x = 1$; $x = 2$; $x = 3$ $\Rightarrow$ $f(1) = 5$; $f(2) = 8$; $f(3) = 11$

3) f. non definita

$f(x) = \frac{x^2}{x+2}$ nei punti $x = 1$; $x = 2$; $x = 3$ $\Rightarrow$ $f(0) = 0$; $f(1) = \frac{1}{3}$; $f(2) = \frac{4}{4} = 1$

$f(x) = \frac{x^2 - 5x + 3}{(-x+6)^2} \to \frac{f(-2) = (-2)^2 - 5\cdot(-2) + 3}{(-(-2)+6)^2}$

Dominio (campo di esistenza)

Il Dominio di una funzione è un insieme dove esiste la funzione

Devo stare attento a che cose:

1) Denominatori ⇒ se ce ne sono, vanno posti diversi da 0 (es) $y = \frac{x}{x^2-4}$ $D = \{x \in \mathbb{R} / x^2 \neq 0\}$

2) Radici di indice pari ⇒ il loro argomento va posto ≥ 0

(es) $y = \sqrt[4]{3-x}$ $D = \{x \in \mathbb{R} / 3-x \geq 0\}$ $x \leq 3$

3) Logaritmi ⇒ il loro argomento va posto > 0

(es) $y = \log_2(3-x)$ $D = \{x \in \mathbb{R} / x < 3\}$

4) $[f(x)]^{g(x)}$ (è una funzione elevata un'altra funzione) ⇒ la funzione $f(x)$ va posta > 0

(es) $y = (x-1)^{\sin x}$ $D = \{x \in \mathbb{R} / x > 1\}$

(es) $y = \frac{\sqrt{x^3-1}}{x^2+2x}$

$x^2+2x \neq 0 \Rightarrow x(x+2) \neq 0 \Rightarrow x \neq 0 ; x \neq -2$

$x^{\frac{3}{2}} - 1 \geq 0 \Rightarrow x^3 \geq 1 \Rightarrow x \geq 1$

$D = \{x \in \mathbb{R} / x \geq 1\}$

(es) $y = \log_2(\log_{\frac{1}{2}} x) \cdot e^{\sin(\pi x)}$

$x > 0$ (ARGOMENTO DEL LOGARITMO INTERNO)

$\log_{\frac{1}{2}} x > 0 \Rightarrow 0 < x < 1$ (ARGOMENTO DEL LOG. ESTERNO)

$D = \{x \in \mathbb{R} / 0 < x < 1\}$

Campo di esistenza delle funzioni elementari

Funzioni		C.d.e.
$f(x) = k$	$k \in \mathbb{R}$	$x \in \mathbb{R}$
$f(x) = x$		$x \in \mathbb{R}$
$f(x) = \lvert x \rvert = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$		$x \in \mathbb{R}$
$f(x) = x^n$	$n \in \mathbb{N}$	$x \in \mathbb{R}$
$f(x) = \sqrt[n]{x}$	n pari	$x \geq 0$
$f(x) = \sqrt[n]{x}$	n dispari	$x \in \mathbb{R}$
$f(x) = \log_a(x)$	$a > 0, a \neq 1$	$x > 0$
$f(x) = a^x$		$x \in \mathbb{R}$
$f(x) = \lfloor x \rfloor$		$x \in \mathbb{R}$

