master COPY

Alessandro Mariotti

Aerodinamica Sperimentale

master COPY

- Fondamenti di analisi dimensionale
  - Teorema del Buckingham
- Principio di similitudine
  - Similitudine parziale
- Approfondimento: curva C_D-Re per cilindro circolare e sfera

master COPY

Grandezze fisiche: sono *proprietà* di oggetti o eventi fisici (es.: lunghezza, massa, velocità)

Grandezze base: sono definite mediante due operazioni fisiche:

- un'operazione di *comparazione* (**A = B**, **A ≠ B,**) che soddisfa alla legge di identità (se **A = B** e **B = C** ⇒ **A = C**);
- un'operazione di *addizione*, che deve essere commutativa (**A + B = B + A**) e associativa [**A** + (**B** + **C**)] = [(**A** + **B**) + **C**].

master COPY

Da queste derivano le seguenti proprietà:

- il concetto di *maggiore* (o *minore*): (se **A + B = C** ⇒ **C > A**);
- la *sottrazione* di grandezze analoghe: (se **A + B = C** ⇒ **A = C – B**);
- la *moltiplicazione per un numero puro*: (se **A = B + B + B** ⇒ **A = 3B**);
- la *divisione per un numero puro*: (se **A = B + B + B** ⇒ **B = A**/3).

master COPY

Una grandezza base può essere espressa come un multiplo di un campione standard dello stesso tipo (*unità di misura*) che può essere scelto in maniera arbitraria.

Una grandezza base può essere *misurata* in termini di una unità arbitraria mediante un *valore numerico*.

Esempi di grandezze base e unità fondamentali: lunghezza, tempo ⇒ metro, secondo.

GRANDEZZE BASE — UNITÀ FONDAMENTALI

Il valore numerico del rapporto fra grandezze dello stesso tipo non dipende dalle unità di misura utilizzate.

Fondamenti di analisi dimensionale
DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA CIVILE E INDUSTRIALE

Grandezza derivata: è ottenuta dal prodotto di diverse potenze dei valori numerici delle grandezze base (es.: velocità = (lunghezza)x(tempo) $^{-1}$)

La *dimensione* (di una grandezza base o derivata) è una formula che definisce come il valore numerico di una grandezza varia quando l'entità delle unità base viene cambiata. Ogni grandezza base ha la sua dimensione.

Es. Se A è il valore numerico di una lunghezza, si dice che A ha le dimensioni di una lunghezza e lo esprimiamo nella forma $[A] = L$, dove le parentesi quadre indicano "dimensione di" e L simbolizza il concetto di lunghezza.

La dimensione di una grandezza derivata si esprime quindi in termini delle dimensioni delle grandezze base scelte.

Es.: la dimensione della velocità V si esprime in termini delle dimensioni delle grandezze base lunghezza L e tempo T come: $[V] = L\,T^{-1}$.

Alessandro Mariotti – Aerodinamica Sperimentale
Fondamenti di analisi dimensionale

master COPY

Fondamenti di analisi dimensionale

Un ***sistema di unità*** si definisce mediante:

- le grandezze base scelte:
- le unità delle grandezze base;
- le grandezze derivate.

master COPY

Sistema internazionale (SI)

Grandezza	Nome	Simbolo
Lunghezza L	metro	m
Massa M	kilogrammo	Kg
Tempo T	secondo	s
Temperatura Q	Kelvin	K
Intensità di corrente I	ampere	A
Numero particelle elementari n	mole	mol
Intensità luminosa Iv	candela	cd

master COPY

Teorema di Buckingham

Si abbia una relazione fra ***n* grandezze x_1, x_2,...x_n** che intervengono in un fenomeno fisico e in cui compaiono ***q* grandezze basi** (unità fondamentali)

$$\mathcal{F}(x_1, x_2 \ldots x_n) = 0$$

Teorema di Buckingham: si può dimostrare che, la relazione è riducibile a:

$$F(\pi_1, \pi_2 \ldots \pi_i) = 0$$

che mette in relazione ***i* = (*n* – *q*) parametri adimensionali π_k fra loro indipendenti**

master COPY

Ogni parametro adimensionale è costituito da prodotti delle varie grandezze x_i elevate a delle potenze, in modo tale che gli esponenti delle grandezze basi che vi compaiono siano uguali a zero:

$$[\pi_k] = \left[x_1^{a_{k1}} x_2^{a_{k2}} \ldots x_n^{a_{kn}}\right] = M^0 L^0 T^0$$

NB. Il teorema si dimostra grazie al principio di omogeneità dimensionale (ovvero che tutti i termini additivi della relazione precedente devono avere la stessa dimensione fisica)

master COPY

master COPY

Se alcune delle grandezze x_i che compaiono nella relazione base sono della stessa natura, cioè dimensionalmente equivalenti (ad es. due lunghezze o due velocità) il loro rapporto è ovviamente adimensionale. Tali rapporti, λ_i, pur rientrando fra i parametri adimensionali derivanti dal teorema di Buckingham, possono anche essere considerati a parte e, in tal caso, vengono chiamati "*fattori di forma*".

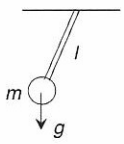
$$F(\pi_1, \pi_2 \ldots \pi_i; \lambda_1, \lambda_2 \ldots \lambda_l) = 0$$

I parametri π_k **sono indipendenti, ma non unici**. Infatti, moltiplicando fra di loro esponenti generici di essi si ottengono altri parametri adimensionali. La **scelta** di quali è più opportuno usare dipende dal loro **significato fisico**.

master COPY

Esempio: oscillazione di un pendolo

Grandezze in gioco: t, g, l, m ; grandezze base: M, L, T
$\Rightarrow$ $n = 4$, $q = 3$, $i = n - q = 1$



Poniamo: $\pi_1 = t^a m^b l^c g^d = T^a M^b L^c L^d T^{-2d}$

Se siamo interessati al periodo di oscillazione $\Rightarrow a = 1$

$$\begin{cases} b = 0 \\ a - 2d = 0 \\ c + d = 0 \end{cases} \Rightarrow a = 1;\ b = 0;\ c = -0.5;\ d = 0.5$$

	t	g	l	m
M	0	0	0	1
L	0	1	1	0
T	1	-2	0	0

$$\pi_1 = t\, l^{-0.5} g^{0.5} = t\sqrt{\frac{g}{l}} \quad \Rightarrow \quad T = \pi_1 \sqrt{\frac{l}{g}}$$

- Il periodo del pendolo **non dipende dalla massa**
- **Noto il valore di π_1 si conosce il periodo di ogni pendolo data la sua lunghezza** (e l'accelerazione di gravità)

master COPY

master COPY

Esempio: **forza *F* agente su un corpo con dimensione caratteristica *l* immerso in una corrente *V***

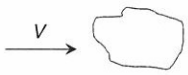
Grandezze in gioco: F, ρ, V, l, μ ; grandezze base: M, L, T

$\Rightarrow n = 5,\ q = 3,\ i = n - q = 2$

Poniamo: $\pi_1 = F^a \rho^b V^c l^d$

$$\begin{cases} a + b = 0 \\ a - 3b + c + d = 0 \\ -2a - c = 0 \end{cases} \Rightarrow a = 1;\ b = -1;\ c = -2;\ d = -2$$

$\pi_1 = F\rho^{-1}V^{-2}l^{-2} = F/(\rho V^2 l^2) = \frac{1}{2}\ C_F$ **Coefficiente di forza**



	F	ρ	V	l
M	1	1	0	0
L	1	−3	1	1
T	−2	0	−1	0

Poniamo: $\pi_2 = \rho^b V^c l^d \mu^e$

$$\begin{cases} b + e = 0 \\ -3b + c + d - e = 0 \\ -c - e = 0 \end{cases} \Rightarrow b = 1;\ c = 1;\ d = 1;\ e = -1$$

	ρ	V	l	μ
M	1	0	0	1
L	−3	1	1	−1
T	0	−1	0	−1

$\pi_2 = \rho V l/\mu = Re$ **Numero di Reynolds** DEVO PRENDERNE 4 ALLA VOLTA

master COPY

- L'analisi dimensionale permette di ottenere il numero di parametri adimensionali indipendenti che sono alla base di un fenomeno fisico e consente di ricavarli. Tuttavia i parametri ottenuti ed il loro numero dipendono dalle grandezze che si è ipotizzato comparire nel fenomeno fisico analizzato.

- Una legge fisica in genere si esprimere nella forma $\pi_1 = f(\pi_2, \pi_3 \ldots \pi_i)$

Se si è interessati ad una particolare grandezza, sia x_1, si può fare in modo che essa compaia con esponente unitario solo in π_1, in modo da poterla esplicitare nella forma:

$$x_1 = x_2^{a_{12}} x_3^{a_{13}} \ldots x_n^{a_{1n}} \pi_1(\pi_2, \pi_3 \ldots \pi_i)$$

π_1 è detto *parametro principale*, in quanto in esso compaiono le grandezze da cui x_1 *principalmente* dipende.

- La scelta del parametro principale π_1 è importante, perché è opportuno che nella espressione sopra riportata la funzione f sia il meno variabile possibile; infatti, ciò significa che la grandezza x_1 dipende in maniera limitata dai parametri π_2, π_3 … π_n, mentre la sua dipendenza da x_2, x_3 … x_n, è essenzialmente quella espressa dal parametro π_1.

master COPY