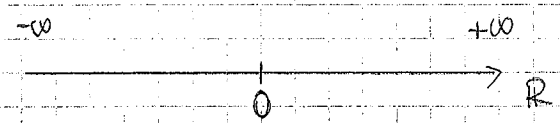
Matematica generale I

Retta dei numeri reali $\mathbb{R}$ (= insieme dei numeri reali)



Lo 0 è l'elemento qualificante

$+\infty$ / $-\infty$] Sono simboli che rappresentano un concetto, non sono numeri

$+\infty$ → non esiste un numero reale più grande di tutti

$-\infty$ → non esiste un numero negativo più piccolo di tutti

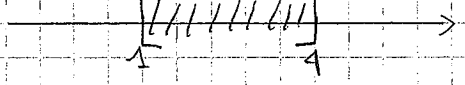
Gli intervalli

Sono sottoinsiemi di $\mathbb{R}$

- ESTREMI INCLUSI: intervallo di estremi a, b inclusi; si rappresenta con le parentesi quadre [ ]

def $[a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$

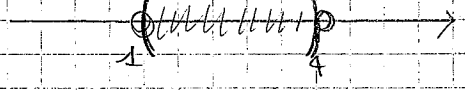
es $[1,4] \Rightarrow \{x \in \mathbb{R} : 1 \leq x \leq 4\}$



- ESTREMI ESCLUSI: intervallo di estremi a, b esclusi, si rappresenta in 2 modi: (a,b) / $]a,b[$

def $(a,b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$

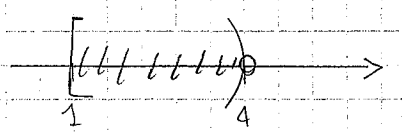
es $(1,4) \Rightarrow \{x \in \mathbb{R} : 1 < x < 4\}$

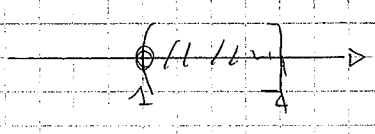


- UN ESTREMO COMPRESO, UNO NO: insieme $[a,b)$ o $(a,b]$

$\Rightarrow [a,b)$ $\Rightarrow (a,b]$

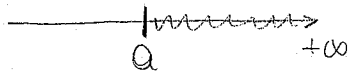
def $[a,b) : \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$ def $(a,b] : \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$





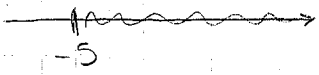
le semirette

- $[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\}$ — def

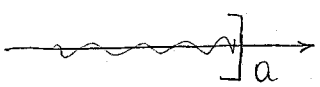


- $(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x > a\}$ — def

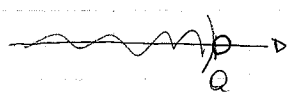
es $(-5, +\infty)$



- $(-\infty, a]$ → def $\{x \in \mathbb{R} : x \leq a\}$

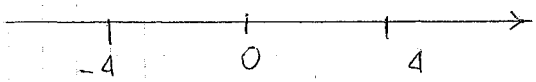


- $(-\infty, a)$ → def $\{x \in \mathbb{R} : x < a\}$



• Proprietà e valore assoluto

Ordinamento: dice quale numero è più grande tramite la STRUTTURA METRICA legata al concetto di DISTANZA (elemento qualificante per il concetto di valore assoluto)



La distanza tra 4 e 0 a che cosa è uguale? a 4 quadretti
$d(4,0) = 4$

E tra -4 e 0? Sempre 4 quadretti

def. distanza di un numero reale x dall'origine $[d(x,0)]$ [che io mi sposti a dx o a sx di 4 caselle, la distanza è sempre 4]

$$\begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x \leq 0 \end{cases}$$

$d(x,0) = |x|$

es $d(5,0) = |5| = 5$

$d(-7,0) = |-7| = 7$

Distanza tra due punti

$d(x, x_0)$

$d(4,1) = 3$? $\quad 4-1 = |4-1|$ $\quad \Rightarrow d(x, x_0) = |x - x_0|$ $\begin{cases} x - x_0 & x \geq x_0 \\ -(x - x_0) & x \leq x_0 \end{cases}$

$d(1,4) = 3$? $\quad -(1-4) = |1-4|$

Intorno di un punto

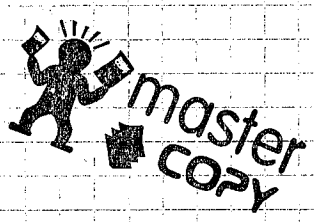
def. $x_0 \in \mathbb{R}$ Intorno di x_0 di raggio $r > 0$

$I = I(x_0) = I(x_0, r)$

$\downarrow I_{x_0}$

$= \{x \in \mathbb{R} : d(x, x_0) < r\}$

$d(x, x_0) = |x - x_0| \begin{cases} x - x_0 & x \geq x_0 \\ -(x - x_0) & x < x_0 \end{cases}$

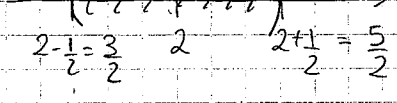


Nel caso dell'intorno, per la definizione $\Rightarrow |x - x_0| < r$

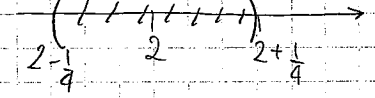
$\begin{cases} x - x_0 < r & x \geq x_0 \\ -x + x_0 < r & x < x_0 \end{cases} \quad \begin{cases} x < r + x_0 \\ -x < r - x_0 \end{cases} \quad \begin{cases} x < x_0 + r & x \geq x_0 \\ x > x_0 - r & x < x_0 \end{cases} \Rightarrow$

$J = \{x \in \mathbb{R} : x_0 - r < x < x_0 + r\}$

es $I = \left(2, \frac{1}{2}\right) = \left(2 - \frac{1}{2}, 2 + \frac{1}{2}\right)$

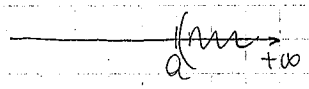


es $I = \left(2, \frac{1}{4}\right) = \left(2 - \frac{1}{4}, 2 + \frac{1}{4}\right)$



Intorno di $+\infty$ e $-\infty$

Visto che $+\infty$ e $-\infty$ non sono numeri, si modifica la definizione



Considero un punto e tutte le x maggiori di a perché non mi posso spostare a dx di $+\infty$, perché idealmente non c'è nulla

- def. di intorno di $+\infty$: l'intorno di $+\infty$ è la semiretta di origine a, non appartenente alla semiretta $(a, +\infty)$
- def. di intorno di $-\infty$: è la semiretta di origine a, non appartenente alla semiretta $(-\infty, a)$

Stabilire la posizione di un punto rispetto ad un insieme

- **PUNTO INTERNO**

def Sottoinsieme $A \subseteq \mathbb{R}$

$a \in A$ ↑ devo provare che c'è

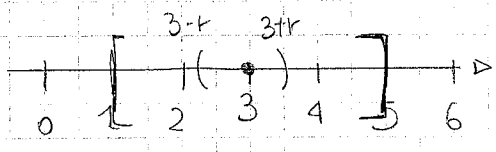
Diremo che a è INTERNO all'insieme A se esiste un intorno di a tutto contenuto nell'insieme A

es $A\ [1,5]$ $a=3$

$A = \{x \in \mathbb{R} : 1 < x < 5\} \Rightarrow a \in A$

Per stabilire se è interno devo determinare l'intorno, cioè il raggio, quindi riprendo la definizione di distanza $\{x \in \mathbb{R} : d(x, x_0) < r\}$

Per determinare il raggio uso il disegno



master COPY

I $(3, 3)$ → questo non va bene perché spostandomi sia a dx che a sx di 3, esco dall'intervallo di partenza $[1,5]$

centro ↓ raggio ↓

In questo caso 3 è non è interno è ho preso un raggio troppo grande

Io devo capire che cose succede molto vicino al numero, quindi non prendo intervalli grandi, ma piccoli (perché il piccolo vale nel grande, ma non viceversa)

Se prendo $a=5$, $a \in \mathbb{R}$, ma non mi posso spostare verso destra senza uscire dall'intervallo, quindi non posso trovare un intorno, per cui non è un punto interno; lo stesso vale per $a=1$

Se prendo $a = 4{,}99$ (o $4{,}9$) è difficile fare il disegno
So che appartengono all'intervallo perché $1 < 4{,}99 < 5$, ma devo vedere se c'è un intorno, cioè un raggio

Dalla definizione so che $d(5, 4.99) = |5 - 4.99| = n^\circ$ positivo → $= r$

4,9 e 4,99 sono interni all'insieme

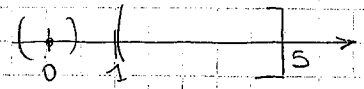
$d = 0$ solo se i due numeri x e x_0 sono uguali

• PUNTO ESTERNO

def. $A \subseteq \mathbb{R}$; x_0 è detto ESTERNO ad A se $x_0 \notin A$ (non appartiene) ed $\exists$ un intorno che no è contenuto in A

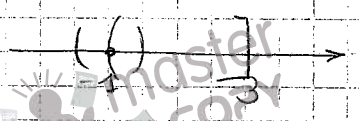
es $A = [1, 5]$

- $0 \notin A$



es $A = \{x \in \mathbb{R} : -1 < x \leq 3\} = (-1, 3]$

$-1 \notin A$

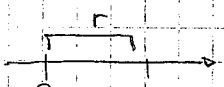


master COPY

-1 non è esterno ad A perché $\notin A$, ma $\exists$ un intorno che è contenuto in A

es 3.0001

$|3 - 3.0001| > 0$ (r)

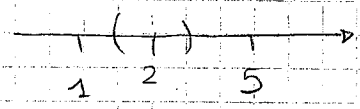


• PUNTO DI FRONTIERA

def. $A \subseteq \mathbb{R}$; x_0 è detto punto di frontiera se OGNI intorno di x_0 contiene sia punti di A sia punti che non appartengono ad A

Gli intorni di un punto sono infiniti, al variare del raggio, varia l'intorno

es $A = [1, 5]$

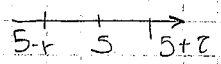


Per trovare i punti di frontiera posso già escludere tutti quelli interni e tutti quelli esterni (perché non hanno nessun punto in comune con l'insieme)

(di frontiera = di confine)

$x_0 = 1$ $\quad$ $x_0 = 5$

$x_0 = 5 \Rightarrow$ intorni di 5



master COPY

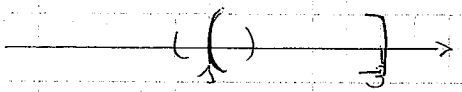
Essendo r, se pur piccolo, è >0, $5+r > 5$, quindi i punti a dx non appartengono all'insieme.

Essendo r, se pur piccolo, è >0, $5-r < 5$, quindi i punti a sinistra appartengono all'insieme.

Lo stesso vale per 1 $\quad (1-r; 1+r)$

1 e 5 sono punti di frontiera

es $A = (-1, 3]$



Questa è la situazione qualunque sia il raggio