01/03/17

# Diagonalizzabilità

$T: V \to V$ applicazione lineare (V sp. vettoriale qualsiasi)

ENDOMORFISMO

↳ rimando dentro di sé (manda da V a V)

Potrebbe non essere un isomorfismo, non è detto!

Ricorda:

Se B è una base $\Rightarrow$ posso scrivere $A = [T]_B^B$ (A = matrice associata a T) (lo posso fare xché lo spazio vettoriale è lo stesso in arrivo e in partenza

T è un isomorfismo $\iff$ T è iniettiva (solo se è un endomorfismo)

T è un isomorfismo $\iff$ T è suriettiva

$\iff \ker T = \{0\}$ $\iff \det A \neq 0$

$\iff$ rango A è max

$\iff$ A è invertibile

$\iff$ avviene il sistema $Ax = b$ ha 1 sola soluzione

Se $\ker T = \{0\} \Rightarrow$ T è iniettiva

↓

vale per tutte le applicazioni lineari non solo per gli endomorfismi (a differenza dell'altra definizione)

Def:

$T: V \to V$ endomorfismo

$v \in V$ è un autovettore se $v \neq 0$ (importante!) e $T(v) = \lambda v$ per qualche $\lambda \in \mathbb{K}$

detto AUTOVALORE

Def:

$T: V \to V$ è diagonalizzabile se V ha una base B formata da autovettori

$B = \{v_1, \dots, v_n\}$

Proposizione:

$T: V \to V$, $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ è una base di autovettori $\iff$

$A = [T]_B^B$ è diagonale $\to \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ se abbiamo un endomorfismo conviene prendere una base di autovettori !!

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

Esempi:

$\text{Rot}_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\text{sen}\,\theta \\ \text{sen}\,\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ ← endomorfismo di $\mathbb{R}^2$

Ricordiamo: ogni $A \in M_{n\times n}(K)$ rappresenta un endomorfismo

$$L_A : K^n \to K^n, \quad v \to A\cdot v$$

↳ Le funzioni da adesso in poi andranno SEMPRE scritte così in modo tale da aver subito chiaro il dominio, il codominio e la funzione stessa

Se $\theta \neq 0, \pi$ allora $\text{Rot}_\theta$ non ha autovettori

Def:

$A \in M(n,n) \Rightarrow$ il polinomio caratteristico di A è $P_A(t) \overset{\text{definizione}}{=} \det(A - tI) \overset{\text{teorema}}{=} (-1)^n t^n + (-1)^{n-1} \text{tr}A\, t^{n-1} + \ldots + \det A$

Posso sempre scrivere un polinomio come

$P(t) = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \ldots + a_1 t + a_0$

Proposizione:

$\lambda$ è autovalore per $A \iff \lambda$ è radice di $P_A(t)$

Dimostrazione:

$\Rightarrow$ Se $\lambda$ è autovalore allora $\exists v \in K^n$, $v \neq 0$ t.c $A\cdot v = \lambda v$

$\iff \exists v \neq 0 \in K^n$ t.c $Av - \lambda v = 0$

↳ $(Av - \lambda I\, v) = 0$ / perché $\exists v \neq 0$ che appartiene al Ker

$\iff \exists v \neq 0 \in K^n$ t.c $(A - \lambda I)v = 0 \iff \text{Ker}(A - \lambda I) \neq \{0\}$

$\iff \det(A - \lambda I) = 0 \iff P_A(\lambda) = 0$

Def:

Se $\lambda$ è autovalore per $T: V \to V$ endomorfismo $\Rightarrow$ l'autospazio relativo a $\lambda$ è $V_\lambda = \{v \in V \mid T(v) = \lambda v\} = \{\text{gli autovettori con autovalore } \lambda + \underline{\text{lo zero}}\}$

↳ lo mettiamo dentro in modo tale che $V_\lambda$ sia un sottospazio

↳ di solito non è ammesso

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

$= \{v \in V \text{ t.c } (T - \lambda(Id))v = 0\} = \ker(T - \lambda Id)$ ← è un sottospazio!

non è detto che sia la matrice identità: è l'ENDOMORFISMO IDENTITÀ! (se v, per esempio, è un polinomio Id non è la matrice identità)

Def:

$T: V \to V$ $\lambda$ autovalore

molteplicità geometrica: $mg(\lambda) = \dim V_\lambda$

↳ poiché è contenuto in V, $\dim V_\lambda$ sarà $\leq n$ (dove $n = \dim V$)

molteplicità algebrica: $ma(\lambda)$ è la molteplicità di $\lambda$ come radice del polinomio caratteristico $P_T(t)$

**Teorema di diagonalizzabilità** dove esiste una base di autovettori

$T: V \to V$ endomorfismo è diagonalizzabile $\iff$ valgono entrambi i seguenti fatti:

1_ Le radici del polinomio caratteristico siano tutte in K ↗ sempre verificata in $\mathbb{C}$

2_ $ma(\lambda) = mg(\lambda)$ $\forall \lambda$ autovalore

Scritto in un altro modo:

1_ vuol dire che $P_T(t)$ ha n radici in K contate con molteplicità

Dimostrazione per passi:

$\Rightarrow$ Già vista con Maffo.

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

$\boxed{\Leftarrow}$

L. Proposizione:

Sia $T: V \to V$ endomorfismo. Siano $v_1, \dots, v_k$ autovettori con autovalori $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ distinti $\Rightarrow$ i vettori $v_1, \dots, v_k$ sono l.in.ind.

Dim (per induzione):

Se $k = 1$

Ho $v_1$ autovettore con $\lambda_1$ autovettore. Perché un unico vettore due

lin ind. basta che sia $\neq 0$. Ma gli autovettori non sono mai zero $\Rightarrow$ verificato!

- $K-1 \Rightarrow K$

Supponiamo per assurdo che non siano lin. ind., ovvero che $a_1 v_1 + \dots + a_K v_K = 0$ con qualche $a_i \neq 0$. Devo quindi dimostrare che non è vero, ovvero che $a_i = 0 \ \forall i = \{1, \dots, K\}$

Se $a_i = 0 \ \forall i \in K \Rightarrow T(a_1 v_1 + \dots + a_K v_K) = T(0) = 0$ (poiché è lineare)

(poiché T lineare) $\rightarrow a_1 T(v_1) + \dots a_K T(v_K) = 0$

Poiché $v_1, \dots, v_K$ sono autovettori $T(v_i) = \lambda_i v_i$

$\Rightarrow a_1 \lambda_1 v_1 + \dots + a_K \lambda_K v_K = 0$

Ho due equazioni:

1. $a_1 v_1 + \dots + a_K v_K = 0$
2. $a_1 \lambda_1 v_1 + \dots + a_K \lambda_K v_K = 0$

Voglio togliere $v_K \Rightarrow$ moltiplico (1) per $\lambda_K$ ed ottengo

$a_1 \lambda_K v_1 + \dots + a_K \lambda_K v_K = 0$ (3)

Faccio (3)-(2) ed ottengo:

$a_1 (\lambda_K - \lambda_1) v_1 + \dots + a_{K-1} (\lambda_K - \lambda_{K-1}) v_{K-1} = 0$

$\Rightarrow$ Per ipotesi induttiva $v_1, \dots, v_K$ sono lin. ind. $\Rightarrow v_1, \dots, v_{K-1}$ sono lin. ind.*

$\Rightarrow a_i (\lambda_K - \lambda_i) = 0$ ma $(\lambda_K - \lambda_i) \neq 0$ perché autovalori sono distinti $\Rightarrow a_i = 0 \ \forall i = \{1, \dots, K-1\}$

↳ Resta da dimostrare $a_K = 0$ ma se tutti gli altri si annullano rimane:

$a_K v_K = 0 \Rightarrow a_K = 0$

Dimostrazione teorema di prima ($\boxed{\Leftarrow}$)

1) $\Leftrightarrow P_T(\lambda)$ ha n radici in K contate con molteplicità

$\Leftrightarrow m_a(\lambda_1) + \dots + m_a(\lambda_K) = n$ dove $\lambda_1 = \dots = \lambda_K$ autovalori

uso (2) $\Rightarrow m_g(\lambda_1) + \dots + m_g(\lambda_K) = n$ cioè

$\dim V_{\lambda_1} + \dots + \dim V_{\lambda_K} = n$

* ho supposto vero il teorema per K-1 generico!!

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

$V_{\lambda_1}, \ldots, V_{\lambda_k}$ autospazi. Devo costruire una base di autovettori per $T$.

$i = 1, \ldots, k$ $\quad B^i$ base qualsiasi di $V_{\lambda_i}$

TESI

$B = B^1 \cup B^2 \cup \ldots \cup B^k$ è una base di $V$.

$B^i = \{v_1^i, \ldots, v_{m_i}^i\}$ dove $m_i = mg(\lambda_i) = \dim V_{\lambda_i}$

$=$ quanti elementi ci sono in $B^i$

Mostro che i vettori di $B = B^1 \cup \ldots \cup B^k$ sono indipendenti

$a_1^1 v_1^1 + \ldots + a_{m_1}^1 v_{m_1}^1 + a_1^2 v_1^2 + \ldots + a_{m_2}^2 v_{m_2}^2 + a_1^k v_1^k + \ldots$

$\ldots + a^k_{m_k} v_{m_k} = 0$

Devo dimostrare che $a_i^j = 0 \ \forall i, j$

$w_1$ = combinazione lineare degli elementi di $V_{\lambda_1} \Rightarrow$

$w_1 \in V_{\lambda_1}$

$\Rightarrow$ riscrivo l'equazione come:

$w_1 + w_2 + \ldots + w_k = 0$ dove $w_i \in V_{\lambda_i}$

Due casi:

1) $w_i = 0$

2) $w_i$ è autovettore con autovalore $\lambda_i$

$\downarrow$

$w_1 + w_2 + \ldots + w_k = 0$ con alcuni non nulli.

Poiché sono autovettori con autovalore $\neq$ lo loro comb. lineare non può essere nulla

$\Rightarrow w_1 = w_2 = \ldots = w_k = 0$

$\Rightarrow a_1^1 v_1^1 + \ldots + a_{m_1}^1 v_{m_1}^1 = 0$ (e così per tutti gli altri)

ma $v_1^1, \ldots, v_{m_1}^1$ sono una base ($B^1$) $\Rightarrow a_1^1 = \ldots = a_{m_1}^1 = 0$

↳ non possono essere 0

Quindi, ragionando anche per gli altri autospazi $V_{\lambda_i}$ ottengo $a_i^j = 0 \ \forall i, j$ perché la somma delle molteplicità geometriche che sono $n$

Quindi gli elementi in $B = B^1 \cup \ldots \cup B^k$ sono indipendenti.

Inoltre, poiché sono ($n$ elementi) sono una base!! C.V.D

MASTER COPY Tel. 050 83 12 26 Cell. 388 98 37 745