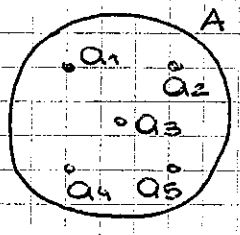
PROBABILITA'

PROBABILITÀ

INSIEME collezione di oggetti che, a sua volta, è un oggetto



Nell'uso informale gli oggetti della collezione possono essere qualunque cosa (persone, numeri, figure, lettere, ...) non necessariamente omogenei.

Nelle formalizzazioni matematiche gli oggetti della collezione sono invece ben definiti e determinati

ELEMENTI DI UN INSIEME sono gli oggetti che compongono l'insieme

$a \in A$ → l'elemento a appartiene all'insieme A
$a \notin A$ → l'elemento a non appartiene all'insieme A

Un elemento non può comparire più di una volta in un insieme; gli elementi di un insieme non hanno un ordine di comparizione e caratterizzano l'insieme univocamente.

DESCRIZIONE DI INSIEMI un insieme può essere descritto nei seguenti modi:

1) ELENCAZIONE: vengono elencati gli elementi dell'insieme

$F = \{ \text{Rosa, Giglio, Geranio} \}$ INSIEME FINITO

$P = \{ 1, 2, 3, 4, \dots \}$ INSIEME INFINITO

2) CARATTERISTICA: si usa la struttura $\{ x : P(x) \}$ dove $P(x)$ è la descrizione di una proprietà

$C = \{ x : 0 \leq x \leq 1 \}$

$D = \{ x : x \text{ è un numero pari} \}$

CARDINALITÀ numero che indica la quantità degli elementi di un insieme, in base a ciò un insieme può essere:

1) finito
2) infinito

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

OPERAZIONI TRA INSIEMI

1) UNIONE o SOMMA: $A \cup B$ oppure $A + B$



insieme formato da tutti gli elementi di A e B presi una sola volta

2) INTERSEZIONE o PRODOTTO: $A \cap B$ oppure $A \cdot B$



insieme formato da tutti gli elementi che appartengono sia ad A che a B

3) DIFFERENZA: $B \setminus A$ oppure $B - A$



insieme formato dai soli elementi di B che non appartengono ad A

4) PRODOTTO CARTESIANO: $A \times B$

insieme formato da tutte le possibili coppie (a,b) con $a \in A$ e $b \in B$

INSIEMI UGUALI o COINCIDENTI $A = B$

Due insiemi A e B sono uguali se tutti gli elementi che costituiscono A sono uguali a tutti gli elementi che costituiscono B

INSIEME VUOTO $\emptyset$ oppure $\{\}$

insieme che non contiene elementi

INSIEMI DISGIUNTI $A \cap B = A \cdot B = \emptyset$

Due insiemi A e B sono disgiunti se non hanno alcun elemento in comune

SOTTOINSIEME

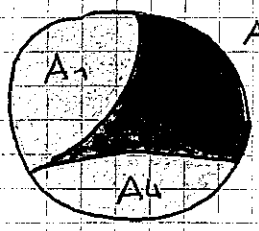
$B \subseteq A \rightarrow$ B è sottoinsieme di A oppure uguale ad A
$B \subset A \rightarrow$ B è sottoinsieme di A

B è sottoinsieme di A se ha contiene tutti gli elementi di B

L'insieme vuoto è sottoinsieme di qualsiasi altro insieme incluso se stesso

Ogni insieme è contenuto in se stesso

PARTIZIONE DI UN INSIEME



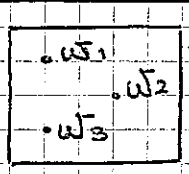
A_i , $i = 1, 2, \dots, K$ Partizione dell'insieme A

$$A = \sum_{i=1}^{K} A_i = A_1 + A_2 + \dots + A_K$$

$A_i \cap A_j = \{\}$ $\forall i, j \in \{1, \dots, K\}$ con $i \neq j$

ESPERIMENTO ALEATORIO esperimento per il quale non è possibile prevedere a priori il risultato, cioè prima di effettuare una prova dell'esperimento stesso; la teoria della probabilità è lo strumento matematico che descrive tale esperimento.

SPAZIO CAMPIONE insieme di tutti i possibili risultati di un esperimento aleatorio



$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_K\}$ SPAZIO CAMPIONE

ω_i possibile risultato

EVENTO sottoinsieme dello spazio campione che ha le seguenti proprietà

1) Se A è un evento, anche il suo complemento $\bar{A}$ rispetto ad Ω è un evento
2) Se A_1 e A_2 sono eventi sono eventi anche
   - $A_1 \cup A_2 = A_1 + A_2$
   - $A_1 \cap A_2 = A_1 \cdot A_2$
3) $A \cup \bar{A} = \Omega$ EVENTO CERTO
4) $A \cap \bar{A} = \{\}$ EVENTO IMPOSSIBILE

EVENTI DISGIUNTI O INCOMPATIBILI

Due eventi A e B sono disgiunti se non possono verificarsi contemporaneamente.

EVENTI COMPLEMENTARI

Due eventi A e $\bar{A}$ sono complementari se il verificarsi di uno esclude il verificarsi dell'altro, ma uno dei due si verifica sicuramente

Due eventi complementari sono incompatibili, ma il viceversa non è detto.

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 389 9937745

FREQUENZA RELATIVA

$f(A) \triangleq \frac{n_A}{n}$

A generico evento
n_A nº di volte che si verifica l'evento A
n nº esperimenti effettuati

Proprietà:

1) $f(A) \geq 0$ perché rapporto di due numeri positivi
2) $f(A) = 0 \iff n_A = 0$ (non si verifica mai l'evento A)
3) $0 \leq f(A) \leq 1$
4) $f(A) = 1 \iff n_A = n$ (si verifica sempre l'evento A)
5) $f(\Omega) = 1$ perché Ω evento certo
6) $f(\emptyset) = 0$ perché $\emptyset$ evento impossibile
7) $f(A+B) = f(A) + f(B) \iff A \in B$ eventi disgiunti

PROBABILITÀ

$P(A) \triangleq \lim_{n\to\infty} f(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{n_A}{n}$ Definizione frequentistica di Von Mises

Definizione Assiomatica di Kolmogorov

1) $P(A) \geq 0$
2) $P(\Omega) = 1$
3) $P(A) + P(B) = P(A+B) \iff A \in B$ eventi disgiunti

Corollari

1) $0 \leq P(A) \leq 1$
2) $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$
3) $P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB)$
4) $P(A \cdot \bar{A}) = P(\emptyset) = 0$
5) $P\left(\sum_k A_k\right) = \sum_k P(A_k) = 1$, A_k partizione di Ω

Definizione Classica di Pascal

$P(A) = \frac{N_F(A)}{N_P}$ → nº casi favorevoli / → nº casi possibili

Si usa nel caso in cui gli eventi in cui è suddiviso lo spazio campione sono equiprobabili

PROBABILITÀ CONDIZIONATA

$$P(A|C) \triangleq \frac{P(AC)}{P(C)}, \quad P(C) \neq 0$$

Probabilità che si verifichi l'evento A condizionata al verificarsi dell'evento C

A EVENTO CONDIZIONATO
C EVENTO CONDIZIONANTE

P(A) probabilità a priori (marginale) di A
P(C) probabilità a priori (marginale) di C
P(A|C) probabilità a posteriori di A dato C
P(AC) Probabilità dell'evento congiunto

EVENTI INDIPENDENTI

Due eventi A e B sono indipendenti se il verificarsi di uno dei due non influisce il verificarsi dell'altro

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B) = P(B \cdot A)$$

quindi

$$P(A|B) \triangleq \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{P(A)P(B)}{P(B)} = P(A)$$

$$P(B|A) \triangleq \frac{P(BA)}{P(A)} = \frac{P(B)P(A)}{P(A)} = P(B)$$

TEOREMA DI BAYES

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)\,P(A)}{P(B)}$$

Dimostrazione

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} \quad \text{e} \quad P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)}$$

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$$P(A|B) = \frac{P(B|A) \cdot P(A)}{P(B)} \Leftarrow P(AB) = P(B|A) \cdot P(A)$$

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745