Schemi su teoremi fondamentali per prova orale.

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745



master COPY
COPISTERIA
050/8312126 388/9837745

Teorema fondamentale della programmazione lineare:
Consideriamo il problema $\max c^T x$; con $P = conv(V) + cono(E)$, e supponiamo che $c^T x$ sia $\leq M$ $\forall x \in P$; devo supporre che ci sia una limitazione superiore. (costante)

TESI: Allora $\exists$ $k = (punto) \in \{1, \dots, n\}$ t.c. v^k sia soluzione ottima del problema dato.

CORO: Se il poliedro ammette vertici; sono sicuro che una delle soluzioni ottime sarà un vertice del poliedro. ($\exists$).
Quindi vado a considerare i vertici fino a trovare l'ottimo

DIMO: $x \in P$ si può scrivere come:

$$x = \sum_{i=1}^{u} \alpha_i v^i + \sum_{j=1}^{r} \lambda_j e^j \; ; \; \sum_{i=1}^{u} \alpha_i = 1, \alpha_i \geq 0, \lambda_j \geq 0$$

combinazione convessa di elementi di V

- Il problema dato si può scrivere come:

$$\max \left[c^T x = \sum_{i=1}^{u} \alpha_i c^T v^i + \sum_{j=1}^{r} \lambda_j c^T e^j \right]$$

- I vincoli saranno:

$$\sum \alpha_i = 1, \alpha_i \geq 0, \lambda_j \geq 0$$

$\Rightarrow c^T x$?

DIMO: che $c^T e^j \leq 0$, quindi se fosse $c^T e^j > 0$ per un $\bar{j}$ allora:

$$c^T x = \sum_{i=1}^{u} \alpha_i c^T v^i + \sum_{j=1}^{r} \lambda_j c^T e^j \longrightarrow +\infty$$
$$\lambda_{\bar{j}} \to +\infty$$

ma risulta assurdo perché $c^T x$ deve essere limitata da M:
$c^T x \leq M$ ($c^T x \leq M$); allora:

$$c^T x = \sum_{i=1}^{u} \alpha_i c^T v^i + \sum_{j=1}^{r} \lambda_j c^T e^j \leq \sum_{i=1}^{u} \alpha_i c^T v^i \leq \sum_{i=1}^{u} \alpha_i (\max (c^T v^i)) = \sum_{i=1}^{u} \alpha_i c^T v^k =$$

$$= c^T v^k$$

Dato un qualsiasi x, $c^T x$ è sempre $\leq c^T v^k$; che è un punto del poliedro perciò ciò ci permette di dire che è un punto di massimo.

CONCL: $c^T x \leq c^T v^k$, $\forall x \in P$; v^k è un punto di massimo del poliedro dato

PROP $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$: P ammette vertici $\Leftrightarrow$ $rg(A) = n$

MASTER COPY
COPISERIA
Tel. 050 831126
Cell. 388 9837745

Teorema degli scarti complementari:

Siano $\bar{x} \in P$ e $\bar{y} \in D$. Allora $\bar{x}$ e $\bar{y}$ sono sol. ottime se e solo se

$$\boxed{\bar{y}^T(b - A\bar{x}) = 0}$$ è equivalente a scrivere

$$\boxed{\bar{y}_i(b_i - A_i\bar{x}) = 0}$$

($\Rightarrow$ vale $\forall$ componente; $\forall$ indice i.)

DIMO: Dal teo. della dualità forte so che $\bar{x}$ e $\bar{y}$ sono ottime

$\Leftrightarrow c^T\bar{x} = \bar{y}^T b$

$\Leftrightarrow \bar{y}^T A\bar{x} = \bar{y}^T b$

$\Leftrightarrow \bar{y}^T A\bar{x} - \bar{y}^T b = 0$

$\Leftrightarrow \bar{y}^T(A\bar{x} - b) = 0$

PROP: Siano $\bar{x}$ e $\bar{y}$ due s.b. associate alla stessa base B; allora $\boxed{\bar{y}^T(b - A\bar{x}) = 0}$ condizione di complementarità

DIMO: $\bar{y}^T(b - A\bar{x}) = 0$

$\Leftrightarrow (\bar{y}^T B, \bar{y}^T N)\begin{pmatrix} b_B - AB\bar{x} \\ b_N - AN\bar{x} \end{pmatrix} = 0$

$\Rightarrow \bar{y}^T B(b_B - AB\bar{x}) + \bar{y}^T N(b_N - AN\bar{x}) = 0$

$= 0$ perché $\bar{x} = AB^{-1}b_B$, $= AB\bar{x} = b_B$

$= 0$ perché $\bar{y}^T N = 0$

Regola anti-ciclo di Bland: (*)

Ci garantisce di trovare sempre un altro vertice al passo successivo, scegliendo il minimo. Ho senso solo quando x è degenere poiché $\theta = 0$.

Con $\theta = 0$ rischio di trovare sempre lo stesso vertice

MASTER COPY Tel. 050 0312126 Cell. 388 9837745

Derivante dell'algoritmo del simplesso primo è:

PROP w^h è una direzione di crescita per la funzione corrispondente all'indice h nel punto $\bar{x}$.

DIMO: $x(\theta) = \bar{x} + \theta w^h$, $\theta \geq 0$

$c^T x(\theta) = c^T \bar{x} + \theta \underbrace{c^T w^h}_{= -\bar{y}_h} = c^T \bar{x} + \theta(-\bar{y}_h) > c^T \bar{x}$; $\theta > 0$ ($-\bar{y}_h = 0$)

$\bar{y}^T B = c^T A B^{-1}$

- $\theta = \min\left\{ \frac{b_i - A_i \bar{x}}{A_i w^h} ; A_i w > 0, i \in N \right\}$ $x(\theta) = \bar{x} + \theta w^h$; $\theta \geq 0$

$x(\theta)$ deve $\in$ a $P \Rightarrow Ax(\theta) \leq b \sim A(\bar{x} + \theta w^h) \leq b \sim A_i(\bar{x} + \theta w^h) \leq b_i$

$A_i \bar{x} + \theta A_i w^h \leq b_i$ (*)

OSS: Se $A_i w^h \leq 0$ $\forall i$ allora (*) sono verificate $\forall \theta$

OSS: Se $\exists\, A_i w^h > 0$,

$A_i \bar{x} + \theta A_i w^h \leq b_i \sim \theta A_i w^h \leq b_i - A_i \bar{x}$

$\theta \leq \frac{b_i - A_i \bar{x}}{A_i w^h}$, $A_i w^h > 0 \Rightarrow \theta \leq \min\left\{ \frac{b_i - A_i \bar{x}}{A_i w^h}, A_i w^h > 0 \right\}$

- Ci sono casi in cui $\theta = 0 \Rightarrow$ trovo le direzioni ma non mi sposto. $\theta = 0$ se ho una soluzione degenere.

Se tutte le sol. b. fossero non degenere, ad ogni passo dell'algoritmo andrei su un vertice diverso. (*)

— o — o — o — o — o — o — o — o — o —

OSS: Dal teo. scarti complementari segue che, una sol. ottima di P deve essere in scarti comp. con una sol. ottima di D e deve essere ammissibile

PROP: $\bar{x}$ e $\bar{y}$ sol. ottime complementari:

- Se $\bar{y}$ non è degenere $\Rightarrow \bar{x}$ è l'unica sol ottima di P
- Se $\bar{x}$ " " " $\Rightarrow \bar{y}$ " " " " " "

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745