RICERCA OPERATIVA

Lezione 1 ①

PROCESSO ITERATIVO

1) **PROBLEMA REALE** (AD ES. DI GESTIONE RISORSE)

2) **MODELLO MATEMATICO** (LA MATEMATICA INTESA COME UNA FORMA DI LINGUAGGIO CHE MI PERMETTE DI DESCRIVERE UN PROBLEMA REALE.

↳ NON SEMPRE UNIVOCAMENTE DET.

↳ SI BASA SU DATI (ES: RETE STRADALE, MEZZI DA UTILIZZARE...)

→ i modelli da utilizzare sono problemi di OTTIMIZZAZIONE VINCOLATA

- $\min$ (o Max) di $f(x)$, $x \in K$

FUNZIONE OBIETTIVO (AD ES IL COSTO) $\longrightarrow f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $K \subseteq \mathbb{R}^n$

$$\max[f(x)] = -\min[-f(x)]$$

COS'È QUESTO INS. K:
- SARÀ L'INSIEME CHE CI DICE QUALI SONO I VINCOLI O DECISIONI AMMISSIBILI



K SARÀ L'INSIEME DI SOLUZIONI DI UN SIST. DI EQ. E DISEQUAZIONI VINCOLATE.

$$K := \{x \in \mathbb{R}^n : g(x) \leq 0, h(x) = 0\} \text{ DOVE } g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

$$g(x) \leq 0 \begin{cases} g_1(x) \leq 0 \\ g_2(x) \leq 0 \\ \vdots \\ g_m(x) \leq 0 \end{cases}$$

3) **ALGORITMO RISOLUTIVO** = UNA SEQUENZA DI ISTRUZIONI (ESEGUIBILE QUINDI DA UN COMPUTER) DEFINITE UNIVOCAMENTE CHE PORTINO IN UN NUMERO FINITO DI PASSI ALLA SOLUZIONE DEL PROBLEMA O A UN'APPROSSIMAZIONE DI ESSO.

[QUANDO LA SOLUZ. HA RAGGIUNTO UN GRADO DI PRECISIONE OTTIMALE MI FERMO.

4) ANALISI DEI RISULTATI OTTENUTI

(IN QUESTO CORSO CI FERMIAMO AL PASSO 3)

[CAPIRE SE IL RISULT. OTTENUTO SIA EFFICIENTE PER IL PROBLEMA]

↓

SE NON È EFFICIENTE

⇓

IL MODELLO MATEMATICO NON È OTTIMALE

⇓

DOBBIAMO AGGIORNARE IL MODELLO MATEMATICO

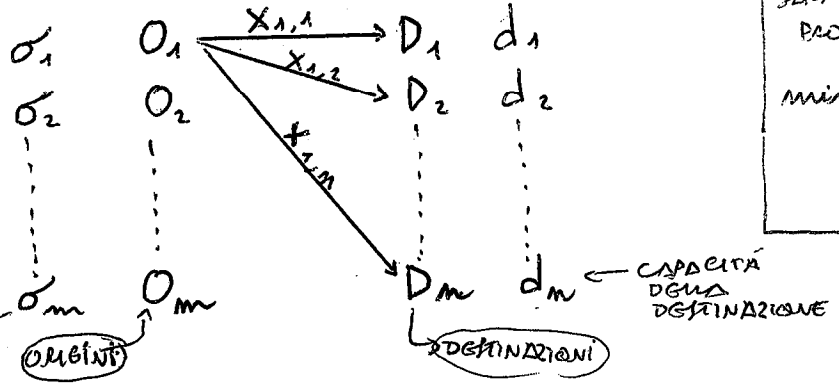
(MAGARI NON HO CONSIDERATO DATI O LE FUNZIONI NON SONO ADEGUATE.)

← NONOSTANTE SIA UN APPROSSIMAZ. DEVE COMUNQUE FORNIRE RISULTATI SODDISFACENTI

(RICORDARE COMUNQUE CHE NON SARÀ MAI IL PROBLEMA REALE)

o — o — o

PROBLEMA DI PROGRAMMAZIONE DEI TRASPORTI



SARÀ IN QUESTO CASO UN PROBLEMA DI MINIMO

$$\min \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_i x_j$$

COSTO PER TRASPORTARE UNA QUANTITÀ x_j DA O_i A D_j

- SIA $c_{i,j}$ IL COSTO UNITARIO DI TRASPORTO DA O_i A D_j $\begin{pmatrix} i = 1, \dots, m \\ j = 1, \dots, n \end{pmatrix}$
- DEFINIAMO $x_{i,j}$ LA QUANTITÀ DI MATERIALE DA TRASPORTARE DA O_i A D_j

[LE VARIABILI SARANNO $m \times n$ PER OGNI m CI SONO n-POSSIBILITÀ]

- IPOTESI INIZIALE $\sum_{i=1}^{m} O_i = \sum_{i=1}^{n} D_j$ (SONO SICURO CHE POSSO TRASPORTARE TUTTO IL MATERIALE)

CONTINUA →

$$\sum_{j=1}^{n} x_{1,j} = O_1$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{2,j} = O_2$$

$$\vdots$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{m,j} = O_m$$

→ TUTTO CIÓ CHE TRASPORTO DA CIASCUNA DELLE VARIE DESTINAZIONI È UGUALE (SE SOMMATO) ALLA QUANTITÁ DI O_1.

CONSEGUENZA DELL'IPOTESI INIZIALE

$$\sum_{j=1}^{n} x_{i,j} = O_i \qquad (i = 1, \dots, m)$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{i,1} = d_1$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{i,2} = d_2$$

$$\vdots$$

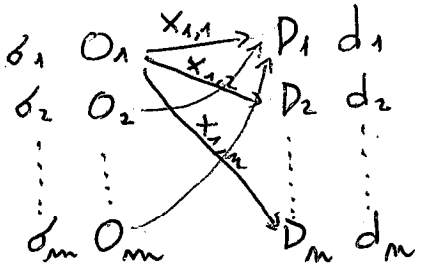
$$\sum_{i=1}^{m} x_{i,n} = d_n$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = d_j \qquad (j = 1, \dots, n)$$

$$x_{ij} \geq 0 \qquad \begin{pmatrix} i = 1, \dots, m \\ j = 1, \dots, n \end{pmatrix}$$

Lezione 2

RIPRENDIAMO L'ESEMPIO PRECEDENTE.



CONDIZIONE 1: $\boxed{\sum_{i=1}^{m} \sigma_i = \sum_{j=1}^{n} d_j}$

x_{ij} = QUANTITÁ DI MATERIALE TRASPORTATA DA O_i A D_j

c_{ij} = COSTO UNITARIO DI TRASPORTO DA O_i A D_j $\begin{pmatrix} i = 1,\dots,m \\ j = 1,\dots,n \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} \min \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}\, x_{ij} \\ \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = \sigma_i \quad (i = 1,\dots,m) \\ \sum_{i=1}^{m} x_{i,1} = d_1 \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = d_j \quad (j = 1,\dots,m) \\ x_{ij} \geq 0 \quad \begin{pmatrix} i = 1,\dots,m \\ j = 1,\dots,n \end{pmatrix} \end{cases}$$

(SECONDO MEMBRO $\in x_{ij}$)

→ VARI VINCOLI



CONDIZIONE 2: $\boxed{\sum_{i=1}^{m} \sigma_i < \sum_{j=1}^{n} d_j}$

$$\begin{cases} \min \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}\, x_{ij} \\ \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = \sigma_i \,, \quad i = 1,\dots,m \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} \leq d_j \,, \quad j = 1,\dots,n \\ x_{ij} \geq 0 \end{cases}$$

I VINCOLI DEVONO ESSERE SEMPRE NELLA CONDIZIONE $\geq$ O $\leq$ ALTRIMENTI NON CI SAREBBERO Max O min MA ESTREMI INF. O SUP.

CONDIZIONE 3: $\sum_{i=1}^{m} o_i > \sum_{j=1}^{n} d_j$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_j \leq o_i \;, \quad i = 1, \dots, m \\ \sum_{i=1}^{m} x_{i,j} = d_j \;, \quad j = 1, \dots, n \\ x_{ij} \geq 0 \end{cases}$$



ESEMPIO REALE:

F_i = FORNITORE i-ESIMO

S_j = SUPERMERCATO j-ESIMO

DOBBIAMO OTTIMIZZARE LA FORNITURA.

X_{ij} = QUANTITÁ DI LATTE FORNITA DA F_i A S_j

	S_1	S_2	S_3	O ← OFFERTA
F_1	5€	3€	2€	100 (hl)
F_2	4€	5€	3€	80 (hl)
D	70 (hl)	80 (hl)	90 (hl)	

↑ DOMANDA

OSSERVAZIONE

$$\sum_{i=1}^{m} o_i < \sum_{j=1}^{n} d_j$$

$$\min \left[5 \cdot x_{1,1} + 3 x_{1,2} + 2 x_{1,3} + 4 x_{2,1} + 5 x_{2,2} + 3 x_{2,3} \right]$$

F_1 e F_2 HANNO LA POSSIBILITÁ DI FORNIRE TUTTA LA DISPONIBILITÁ →

$$x_{1,1} + x_{1,2} + x_{1,3} = 100$$
$$x_{2,1} + x_{2,2} + x_{2,3} = 80$$

↘ VINCOLI

$$x_{1,1} + x_{2,1} \leq 70$$ (F_1, S_1, S_1) (PERCHÉ IL PRIMO SUPERMERCATO CHIEDE AL MASSIMO 70)

$$x_{1,2} + x_{2,2} \leq 80$$
$$x_{1,3} + x_{2,3} \leq 90$$
$$x_{ij} \geq 0$$ ← CONDIZIONE DI NON BANALITÁ (CHE SEMPRE)