master COPY COPISTERIA

INTRODUZIONE AI MODELLI

$\begin{cases} \min c^T x \\ Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases}$ e $\begin{cases} \max c^T x \\ Ax \leq b \end{cases}$ $\quad x \in \mathbb{R}^n \quad c \in \mathbb{R}^n \quad A \in \mathbb{R}^{m \times n} \quad b \in \mathbb{R}^m$

Vincoli relativi alle origini: $\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = o_i \quad i = 1, \dots, m$

Vincoli relativi alle destinazioni: $\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = d_j \quad j = 1, \dots, n$

→ Modello

$$\begin{cases} \min \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \\ \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = o_i \quad i = 1, \dots, m \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = d_j \quad j = 1, \dots, n \\ x_{ij} \geq 0 \quad i = 1, \dots, m \quad j = 1, \dots, n \end{cases}$$

Casi speciali

1) $\sum_{i=1}^{m} o_i < \sum_{j=1}^{n} d_j$ non è rispettato il vincolo relativo alle destinazioni

$$\begin{cases} \min \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \\ \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = o_i \quad i = 1, \dots, m \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} \leq d_j \quad j = 1, \dots, n \\ x_{ij} \geq 0 \quad i = 1, \dots, m \quad j = 1, \dots, n \end{cases}$$

2) $\sum_{i=1}^{m} o_i > \sum_{j=1}^{n} d_j$ non è rispettato il vincolo relativo alle origini

$$\begin{cases} \min \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \\ \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leq o_i \quad i = 1, \dots, m \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = d_j \quad j = 1, \dots, n \\ x_{ij} \geq 0 \quad i = 1, \dots, m \quad j = 1, \dots, n \end{cases}$$

Formulazione matriciale

A = formulazione matriciale delle equazioni

D = formulazione matriciale delle disequazioni

$\begin{cases} \min c^T x \\ Ax = b \\ Dx \leq d \end{cases}$ $\quad \min c^T x = -\max(-c^T x)$ $\quad Ax = b = \begin{cases} Ax \leq b \\ -Ax \leq -b \end{cases}$

$\begin{cases} \max c^T x \\ Ax \leq b \\ x \geq 0 \end{cases}$ problema di massimo

master COPY COPISTERIA

master COPY COPISTERIA

master COPY

ANALISI CONVESSA

Insieme convesso $K \subseteq \mathbb{R}^n$ se comunque si scelgono due punti $x_1, x_2 \in K$ si ha
$\alpha x_1 + (1-\alpha) x_2 \in K \quad \forall \alpha \in [0,1]$

↳ è un punto generico del segmento di estremi x_1 e x_2

K è convesso quando si verifica che se contiene due punti x_1 e x_2, allora contiene anche tutto il segmento di estremi x_1, x_2

L'intersezione arbitraria di insiemi convessi è un insieme convesso

Un punto $x \in \mathbb{R}^n$ si dice combinazione convessa di $x_1, \dots, x_m \in \mathbb{R}^n$ se $\exists \alpha_1, \dots, \alpha_m$ tali che
$x = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i x_i \qquad \alpha_i \in [0,1] \ \forall i \qquad \sum_{i=1}^{m} \alpha_i = 1$
la combinazione convessa si dice propria se $0 < \alpha_i < 1 \ \forall i$.

L'inviluppo convesso di un insieme K, $\text{conv}(K)$, è l'insieme di tutte le possibili combinazioni convesse di elementi di K.

Un insieme è convesso se e solo se coincide con il suo inviluppo convesso

Un sottoinsieme K di $\mathbb{R}^n$ si dice cono se $\forall x \in K$ e $\forall \lambda \geq 0$ si ha $\lambda x \in K$.
↳ se K contiene un punto x diverso dall'origine, allora contiene anche tutta la semiretta uscente dall'origine passante per x.

Un punto $x \in \mathbb{R}^n$ si dice combinazione conica di $x_1, \dots, x_m \in \mathbb{R}^n$ se $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_m$ tali che
$x = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i \qquad \lambda_i \geq 0 \ \forall i = 1, \dots, m$ (propria se $\lambda_i > 0 \ \forall i = 1, \dots, m$)

L'inviluppo conico di un insieme K, $\text{cono}(K)$, è l'insieme di tutte le possibili combinazioni coniche di elementi di K.

Un insieme è un cono convesso se e solo se coincide con il suo inviluppo conico.

Un poliedro di $\mathbb{R}^n$ è l'intersezione di un numero finito di semispazi chiusi di $\mathbb{R}^n$

semispazio chiuso $= \{x : a^T x \leq \beta\} \quad a \in \mathbb{R}^n, \beta \in \mathbb{R}$

Poliedro $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\} \quad A \in \mathbb{R}^{m \times n}, b \in \mathbb{R}^m$
↳ è un insieme convesso perché intersezione di semispazi chiusi che sono insiemi convessi

Regione ammissibile di un problema di programmazione lineare è un poliedro

Un poliedro che è anche cono si dice cono poliedrico

- Se P è un cono poliedrico allora $\exists$ matrice Q tale che $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Qx \leq 0\}$ +dim

Un vertice di un poliedro P è un punto di P che non si può esprimere come combinazione convessa propria di altri punti del poliedro. L'insieme dei vertici di P è $\text{vert}(P)$

$\bar{x} \in P$ è un vertice se $\nexists \ x', x'' \in P : \bar{x} \in (x', x'')$

P ammette vertici $\Leftrightarrow$ P non contiene rette. $\Rightarrow$ un poliedro limitato ammette vertici

Una direzione di recessione per un poliedro P è un vettore d tale che
$x + \lambda d \in P \quad \forall x \in P, \forall \lambda \geq 0$
ossia d è una direzione di recessione se P contiene tutte le semirette di direzione d uscenti da punti appartenenti a P.

L'insieme delle direzioni di recessione di P è $\text{rec}(P)$

Un poliedro limitato ha $\text{rec}(P) = \{0\}$

$A + B = \{y \in \mathbb{R}^n : y = a + b, \ a \in A, \ b \in B\}$

Teorema: Rappresentazione dei poliedri

Un insieme $P \subseteq \mathbb{R}^n$ è un poliedro se e solo se esistono un sottoinsieme finito $V = \{v_1, \dots, v_m\}$ di P ed un insieme finito $E = \{e_1, \dots, e_p\} \in \mathbb{R}^n$ tali che $P = \text{conv}(V) + \text{cono}(E)$

oss: - Se $\text{vert}(P) = \emptyset \Rightarrow V = \text{vert}(P)$
- $\text{cono}(E)$ coincide sempre con $\text{rec}(P)$
- se P è limitato allora P ammette vertici e $P = \text{conv}(\text{vert}(P))$

TEORIA DELLA PROGRAMMAZIONE LINEARE

$\begin{cases} \max c^T x \\ Ax \le b \end{cases}$

m = nº vincoli
n = nº variabili
$A \in \mathbb{R}^{m \times n}$
b = vettore di m componenti
c = vettore di n componenti

Gli insiemi di livello della funzione obiettivo sono $L(K) = \{x \in \mathbb{R}^n : c^T x = K\}$ dove $K \in \mathbb{R}$ è un valore dato. La soluzione ottima è il punto di intersezione della regione ammissibile con la retta del fascio corrispondente al massimo valore di K.

oss. Se il poliedro P che definisce la regione ammissibile di un problema di programmazione lineare ammette vertici, allora l'insieme delle soluzioni ottime del problema contiene sempre un vertice di P

Teorema fondamentale della programmazione lineare (PL)

$\max_{x \in P} c^T x$ con P un qualsiasi poliedro

Supponiamo che $P \neq \emptyset$ sia rappresentato come $P = \text{conv}\{v_1, \dots, v_m\} + \text{cono}\{e_1, \dots, e_p\}$ dove $v_i \in P$ $i = 1, \dots, m$, $e_j \in \mathbb{R}^n$ $j = 1, \dots, p$, ed esista una costante H tale che $c^T x \le H$ $\forall x \in P$ (funzione vincolata superiormente). Allora il problema $(\mathcal{P})$ ha valore ottimo finito ed esiste $k \in \{1, \dots, m\}$ tale che v^k è una soluzione ottima di $(\mathcal{P})$ +dim

cor. Se il problema $(\mathcal{P})$ ha valore ottimo finito e $\text{vert}(P) = \emptyset$ allora $\exists$ vertice ottimo.

Teorema

Supponiamo che il poliedro $P \neq \emptyset$ sia limitato e quindi possa essere rappresentato come $P = \text{conv}\{v_1, \dots, v_m\}$ dove $\{v_1, \dots, v_m\} = \text{vert}(P)$. Allora il problema $(\mathcal{P})$ ha valore ottimo finito ed esiste $k \in \{1, \dots, m\}$ tale che v_k sia una soluzione ottima di $(\mathcal{P})$ +dim (94)

PL forma standard → qualsiasi problema di PL può essere formulato in forma standard

$\begin{cases} \max c^T x \\ Ax \le b \end{cases}$

$\min c^T x = -\max(-c^T x)$ $\quad a^T x \le b = -a^T x \le -b \quad a^T x = b = \begin{cases} a^T x \le b \\ -a^T x \le -b \end{cases}$

Considero $\max c^T x \quad x \in P := \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \le b\}$

$A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ con rango $n \Rightarrow$ se $P \neq \emptyset$ allora $\text{vert}(P) \neq \emptyset$

A_i $i = 1, \dots, m$ righe di A

Base è un insieme B di n indici di riga, $B \subseteq \{1, \dots, m\}$, tale che la sottomatrice A_B, ottenuta estraendo da A le righe A_i con indici $i \in B$, sia invertibile cioè $\det(A_B) \neq 0$.

La matrice A_B si dice matrice di base

$A = \begin{pmatrix} A_B \\ A_N \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} b_B \\ b_N \end{pmatrix}$ (N = insieme indici che $\notin B$)

Soluzione di base primale $\bar{x} = A_B^{-1} b_B$ è l'unica soluzione del sistema $A_B x = b_B$

↳ è ammissibile se $\bar{x} \in P$, ossia se si ha $A_N \bar{x} \le b_N$ cioè $A_i \bar{x} \le b_i$ $\forall i \in N$

Teorema

Condizione necessaria e sufficiente affinché $x \in \mathbb{R}^n$ sia un vertice di P è che $\bar{x}$ sia una soluzione di base primale ammissibile

per vedere se $\bar{x}$ è ottima → introduzione problema duale

Teoria della dualità

$\mathcal{P}$: $\max c^T x$ con i vincoli $x \in P := \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \le b\}$

Il problema duale associato a $\mathcal{P}$, $\mathcal{D}$ è definito da: $\min y^T b$

↓ dà un'idea del comportamento dei vincoli rispetto al problema stesso

con i vincoli $y \in D := \{y \in \mathbb{R}^m : y^T A = c^T, y \ge 0\}$

dove m = nº vincoli di disuguaglianza

Dualità debole: vale la relazione $c^T x \le y^T b \quad \forall x \in P, \forall y \in D$
Infatti, dati $x \in P$ e $y \in D$, risulta $c^T x = y^T A x \le y^T b$, essendo $y^T \ge 0$ e $Ax \le b$.
oss: $\max c^T x \le y^T b$, $\forall y \in D$
dato $\bar{y} \in D$, il valore $\bar{y}^T b$ è una stima del valore ottimo del problema P, ossia risulta $\max c^T x \le \bar{y}^T b$. Analogamente dato $\bar{x} \in P$ risulta $c^T \bar{x} \le y^T b \ \forall y \in D$.
Da $\max_{x \in P} c^T x \le y^T b$ segue anche $\max_{x \in P} c^T x \le \min_{y \in D} y^T b$
es grafico: $\overline{c^T x,\ x \in P \quad | \quad y^T b,\ y \in D}$
valore ottimo dei due problemi (primale e duale)

Conseguenze della dualità debole
- se P è illimitato superiormente allora $D = \emptyset$
- se D è illimitato inferiormente allora $P = \emptyset$
- se $P \neq \emptyset$ e $D \neq \emptyset$ allora P e D ammettono ottimo finito

Dualità forte
- se problema primale P ammette ottimo finito se e solo se il problema duale D ammette ottimo finito
- $\bar{x} \in P$ e $\bar{y} \in D$ sono le rispettive soluzioni ottime del problema P e del problema D se e solo se risulta: $c^T \bar{x} = \bar{y}^T b$
ossia $\max_{x \in P} c^T x = \min_{y \in D} y^T b$ nell'ipotesi che P e D ammettano ottimo finito.

oss: dalla dualità forte segue che se $D = \emptyset$ allora P è illimitato superiormente oppure $P = \emptyset$.
(è possibile che siano simultaneamente $P = \emptyset$ e $D \neq \emptyset$)

Teorema condizione di ottimalità
$\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ è soluzione ottima del problema P se e solo se $\exists \bar{y} \in \mathbb{R}^m$ tale che $(\bar{x}, \bar{y})$ sia soluzione del sistema

$$\begin{cases} y^T A = c^T \\ y \ge 0 \\ Ax \le b \\ c^T x = y^T b \end{cases} \quad \begin{matrix} \} \text{ soluzione ammissibile per } D \\ \} \text{ soluzione ammissibile per } P \\ \} \text{ dualità forte} \end{matrix}$$

in tal caso $\bar{y}$ è soluzione ottima del problema D

Essendo D un problema di programmazione lineare, per il teorema fondamentale di PL, avrà anch'esso una soluzione ottima in un vertice del poliedro D, nel caso in cui D ammetta ottimo finito.
Per verificare l'ottimalità di una soluzione di base ammissibile x per P tramite la condizione di ottimalità, si determina il vertice y del poliedro D che soddisfi la condizione $c^T x = y^T b$
è necessario pertanto considerare una caratterizzazione algebrica di un vertice del poliedro D.

Soluzioni di base primali e duali
Una base è un insieme B di n indici di riga, $B \subseteq \{1, \dots, m\}$, tale che la sottomatrice A_B, ottenuta da A estraendo le righe A_i con $i \in B$, sia invertibile cioè $\det(A_B) \neq 0$.
Detto N l'insieme degli indici di riga che non appartengono a B, dalla partizione degli m indici di riga in B e N si hanno le partizioni per i vettori b e $y \in \mathbb{R}^m$ e per la matrice A:

$$b = \begin{pmatrix} b_B \\ b_N \end{pmatrix} \quad y = \begin{pmatrix} y_B \\ y_N \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} A_B \\ A_N \end{pmatrix}$$

Data una base B:
SOLUZIONE DI BASE PRIMALE: $\bar{x} = A_B^{-1} b_B$
SOLUZIONE DI BASE DUALE: $\bar{y}^T = (\bar{y}_B^T, \bar{y}_N^T)$ dove $\bar{y}_B^T = c^T A_B^{-1}$, $\bar{y}_N^T = 0$

Soluzioni di base ammissibili e degeneri

- una soluzione di base primale $\bar{x}$ è ammissibile, se $\bar{x} \in P$, ossia se $\forall i \in N$ si ha $A_i \bar{x} \leq b_i$
  una soluzione di base primale $\bar{x}$ è degenere, se $\exists i \in N : A_i \bar{x} = b_i$
- una soluzione di base duale $\bar{y}$ è ammissibile, se $\bar{y} \in D$, ossia $\forall i \in B$ si ha $\bar{y}_i \geq 0$.
  una soluzione di base duale $\bar{y}$ è degenere se $\exists i \in B: \bar{y}_i = 0$.

Teorema

- condizione necessaria e sufficiente affinché un vettore $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ sia un vertice di P è che $\bar{x}$ sia una soluzione di base primale ammissibile.
- condizione necessaria e sufficiente affinché un vettore $\bar{y} \in \mathbb{R}^m$ sia un vertice di D è che $\bar{y}$ sia una soluzione di base duale ammissibile.

oss: una soluzione di base duale $\bar{y}^T = (\bar{y}_B^T, \bar{y}_N^T)$ soddisfa sempre i vincoli $y^T A = c^T$
data la base B, $y^T A = c^T$ si può scrivere $(y_B^T, y_N^T)\begin{pmatrix} A_B \\ A_N \end{pmatrix} = c^T \iff y_B^T A_B + y_N^T A_N = c^T$
ponendo $y_N^T = \bar{y}_N^T = 0$ si ottiene $y_B^T A_B = c^T$
da cui $y_B^T = c^T A_B^{-1} \rightarrow y_B^T = \bar{y}_B^T$ se $\bar{y}_B^T \geq 0$ allora $\bar{y} \in D$ e $\bar{y}$ è una s.b. duale ammissibile

oss: una s.b. degenere soddisfa come uguaglianza più vincoli di quanti siano necessari per determinarla.
Di conseguenza a una s.b. possono essere associate più basi

Teorema degli scarti complementari

$\bar{x} \in P$ e $\bar{y} \in D$ sono soluzioni ottime dei problemi P e D $\iff \bar{y}^T(A\bar{x} - b) = 0$ ottime
Due soluzioni vengono dette complementari se $\bar{y}^T(A\bar{x} - b) = 0$
Due soluzioni di base primale e duale (non necessariamente ammissibili) associate alla stessa base B sono complementari.

Teorema ottimalità di una soluzione

Sia $\bar{x} = A_B^{-1} b_B$ una soluzione di base primale ammissibile (cioè un vertice del poliedro). Sia $\bar{y}^T = (\bar{y}_B^T, \bar{y}_N^T)$,
ove $\bar{y}_B^T := c^T A_B^{-1}$, $\bar{y}_N^T = 0$, la s.b. duale associata alla base B.
se risulta $\bar{y}_B^T \geq 0$ allora $\bar{x}$ è una soluzione ottima di P.
inoltre $\bar{y}^T$ è una soluzione ottima di D

ALGORITMO SIMPLESSO PRIMALE

L'algoritmo parte da una soluzione di base primale ammissibile (cioè un vertice). se la soluzione di base duale complementare è ammissibile, allora esse sono ottime rispettivamente per il primale e per il duale, altrimenti si cambia base. Il cambio di base è definito in modo che se la nuova soluzione di base primale è diversa da quella vecchia, il valore della funzione obiettivo cresce, mentre se la nuova soluzione di base primale coincide con quella vecchia, si evita di ciclare nelle stesse basi con opportuna regola di anticiclo ("regola anticiclo di Bland").

Correttezza dell'algoritmo del simplesso primale

Sia data la soluzione di base primale $\bar{x}$. Se la soluzione di base complementare $\bar{y}$ è duale ammissibile, allora $\bar{x}$ è ottima per il primale e $\bar{y}$ è ottima per il duale
se invece $\bar{y}$ non è duale ammissibile, allora consideriamo la semiretta uscente da $\bar{x}$ con direzione w^h: $x(\lambda) = \bar{x} + \lambda w^h \quad \lambda \geq 0 \quad (\lambda \to \theta)$.
Il valore della funzione obiettivo cresce spostandosi dal punto $\bar{x}$ nella direzione w^h.

vincoli di base: $A_i w^h = \begin{cases} 0 & \text{se } i \in B \setminus \{h\} \\ -1 & \text{se } i = h \end{cases}$

si ha $A_i x(\lambda) = A_i \bar{x} + \lambda A_i w^h = \begin{cases} b_i & \text{se } i \in B \setminus \{h\} \\ b_i - \lambda \leq b_i & \text{se } i = h \end{cases} \quad \forall \lambda \geq 0$

Quindi i vincoli di base $A_i x \leq b_i$ con $i \in B$, sono soddisfatti da tutti i punti $x(\lambda)$ della semiretta.

vincolo non di base: $A_i x(\lambda) \leq b_i \quad i \in N \rightarrow \begin{cases} \lambda \geq 0 & \text{se } A_i w^h \leq 0 \\ \lambda \leq \frac{b_i - A_i \bar{x}}{A_i w^h} & \text{se } A_i w^h > 0 \end{cases}$

se $A_i w^h \leq 0 \ \forall i \in N \Rightarrow$ tutta semiretta $x(\lambda)$ è contenuta nel poliedro $\Rightarrow c^T x(\lambda) \xrightarrow{\lambda \to +\infty} +\infty$