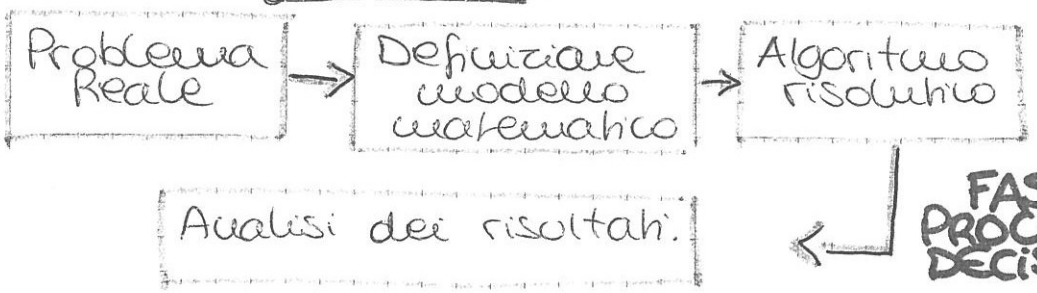
METODOLOGIA della RICERCA OPERATIVA

La ricerca operativa è una disciplina di carattere matematico, che usa un approccio scientifico per l'analisi di problemi decisionali che coinvolgono la gestione di risorse; il suo obbiettivo è quello di prendere decisioni riguardo l'uso di risorse disponibili limitate così da massimizzare il beneficio ottenibile dall'uso di tali risorse e/o minimizzare i costi di gestione.

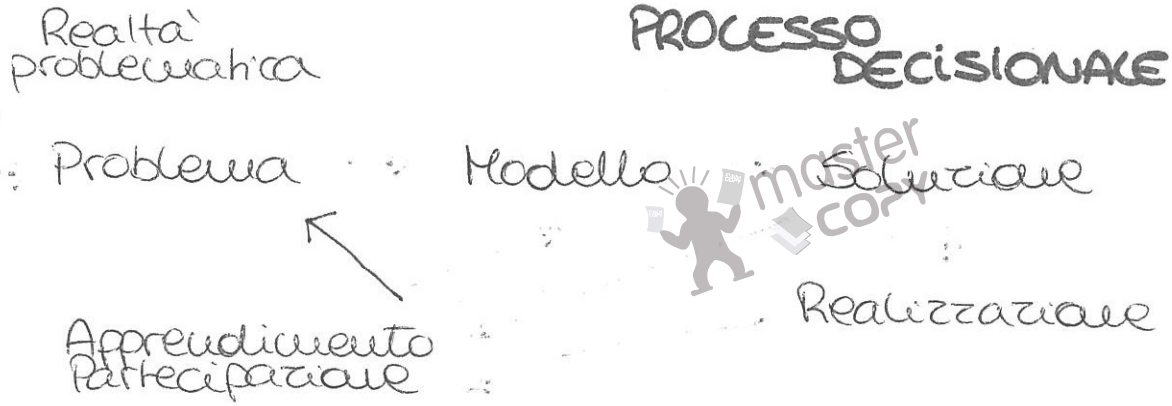
OSS. Si ha come punto di partenza sempre un problema reale; sono, infatti, problemi che comprendiamo a fondo.

IDEA! Si prendono in analisi tutte le metodologie mirate a migliorare l'efficacia delle decisioni; ognuna di queste prende in considerazione precise fasi del processo decisionale:



ALGORITMO: è una sequenza di istruzioni univocamente determinate, che ci porta alla risoluzione del nostro problema.

Per risolvere un problema si passa attraverso un PROCESSO DECISIONALE:



MODELLO: è la riformulazione in termini matematici del problema reale, ma non per questo i due devono necessariamente coincidere: il modello, infatti, potrebbe anche essere una semplificazione del problema a cui fa riferimento.

In alcuni casi la soluzione che otteniamo potrebbe non soddisfare le nostre esigenze, dunque, in tal caso, sarà necessario ridefinire il modello

⇒ [OCCHIO! l'idea di modello non deve essere sopravvalutata] ⇐

La R.O si è sviluppata durante la II guerra mondiale, quando le imprese belliche richiedevano la gestione di una vasta quantità di risorse che, se fossero state mal gestite, avrebbero provocato un effetto molto più vasto rispetto a un caso di risorse limitate.
Una svolta decisiva per la R.O è stato l'avvento dei calcolatori elettronici, dato che i modelli usati, per quanto esemplificativi del problema reale, si basano su un numero significativo di variabili.

PROBLEMA REALE: il problema reale deve essere in grado di fornire dati sufficientemente corretti ed esaustivi così da permettere la formulazione del modello matematico

IDEA! è necessario definire sia gli obbiettivi che i vincoli da imporre al modello.

MODELLO: (definizione comune) è una persona o una cosa che può essere portata come esempio da imitare;

=> sono lo strumento normale con il quale conosciamo ed interagiamo con la realtà.

=> sono costruzioni concettuali, a vari livelli di astrazione, che dunque non necessariamente coincidono con la realtà.

=> vengono costruiti in maniera incrementale e svolgono le principali funzioni cognitive.

Per rappresentare un modello si utilizzano dei linguaggi specifici che si possono classificare in base a:

- ESPRESSIVITÀ, usato nei casi più complessi, come situazioni emozionali, dove viene meno l'aspetto rigoroso del linguaggio, (linguaggio letterario)
- RIGORE e PRECISIONE nella DESCRIZIONE, usati quando si ha a che fare con dati quantificabili e dunque riconducibili in un modello matematico, (Linguaggi formali e/o matematici).

OSS. un evento si definisce quantificabile quando ci sono valori numerici che ne stabiliscono il comportamento.

MODELLI MATEMATICI

Un modello matematico è la descrizione di un problema reale attraverso l'uso di un linguaggio matematico, ed è formulato a partire da ipotesi adeguatamente motivate; tali ipotesi sono i "limiti" del modello e devono essere costantemente osservate, in particolar modo durante l'analisi dei risultati.

3 varie tipologie di modelli:

- MODELLI DETERMINISTICI, dove i dati del problema sono valori certi
- MODELLI PROBABILISTICI, dove i dati sono caratterizzati da una distribuzione di probabilità.
- MODELLI DINAMICI, dove i dati dipendono dal tempo, e così l'output del modello è una funzione del tempo
- MODELLI STATICI, dove i dati sono fissati e non variano in funzione del tempo.

I problemi più comunemente affrontati sono i problemi di OTTIMIZZAZIONE VINCOLATA.

DEFINIZIONE:

I problemi di ottimizzazione vincolata sono quei problemi dove si deve determinare il massimo o il minimo di una funzione

$$f: X \to \mathbb{R} \qquad \min (\max) f(x),\ x \in R$$

$f(x)$ = funzione obbiettivo ↳ soluzione

R = regione ammissibile del problema.

ALGORITMO: è una sequenza di istruzioni univocamente determinate che ci portano alla risoluzione del problema; esso determina la singola soluzione e non necessariamente un insieme di soluzioni ammissibili.

OSS: una volta ottenuti i risultati è fondamentale la fase di feedback, dove questi vengono confrontati con la formulazione del problema.

PROBLEMI di OTTIMIZZAZIONE

Un problema di ottimizzazione consiste nel determinare un punto $x \in R \subseteq X$ che renda minimo/massimo il valore della funzione

$$f: X \to \mathbb{R} \quad , \quad \min_{x \in R} (\max) f(x)$$

OSS! non c'è differenza tra il determinare il massimo o il minimo della funzione $f: X \to \mathbb{R}$, grazie alla relazione per cui:

$$\max_{x \in R} f(x) = - \min_{x \in R} (-f(x))$$

OSS. si riconduce la ricerca del min a quella del max e viceversa.

IDEA! un punto $\bar{x} \in R$ è un punto di minimo o massimo assoluto se:

$$f(\bar{x}) \leq f(x) \quad \forall x \in R \quad \text{(minimo)}$$
$$f(\bar{x}) \geq f(x) \quad \forall x \in R \quad \text{(massimo)}$$

CASO PARTICOLARE: (programmazione matematica)

Un problema di programmazione matematica è un problema di ottimizzazione nel quale $X \subseteq \mathbb{R}^n$, e R è definito nella forma:

$$R = \{x \in X : g_i(x) \leq 0, \ i = 1, \dots, p; \ \underbrace{h_j(x) = 0}_{\text{↳ ho un numero } j \text{ di uguaglianze}} \ j = 1, \dots, m\}$$

$\Rightarrow$ R è l'insieme dei risultati ammissibili, dunque rappresenta i vincoli.

DEFINIZIONE:

Un problema di programmazione matematica è un problema del tipo:

$$\min_{x \in R} (\max_{x \in R}) f(x)$$

con $R = \{x \in X : g(x) \leq 0, \ h(x) = 0\}$

$\Rightarrow$ se $R = X$ il problema si dice non vincolato

PROBLEMI di PROGRAMMAZIONE LINEARE

IDEA! Una funzione si definisce "lineare" quando è della forma $f(x) = ax + b$ se siamo in $\mathbb{R}$, mentre se ci troviamo in $\mathbb{R}^2$ questa ha una forma del tipo

$$f(x_1, x_2) = ax_1 + x_1 + bx_2 + x_2$$

Prendendo in caso di programmazione matematica, a seconda delle proprietà della funzione obbiettivo e dei vincoli possiamo distinguere i vari casi:

- se $X = \mathbb{R}^n$ allora si parla di PROGRAMMAZIONE LINEARE (PL)

Un problema di programmazione lineare (PL) ha una formulazione standard del tipo:

$$\begin{cases} \min (c_1 x_1 + ___ + c_n x_n) \\ a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + ___ + a_{1n} x_n = b_1 \\ \quad\quad | \\ a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + ___ + a_{mn} x_n = b_m \\ x_i \geq 0 \;, \; i = 1, _, n \end{cases}$$

FORMULAZIONE di MINIMO (equazioni)

oss. la funzione obiettivo è una funzione lineare.

- possiamo esprimere il medesimo problema con disequazioni lineari:

$$\begin{cases} \max (c_1 x_1 + ___ + c_n x_n) \\ a_{11} x_1 + _____ + a_{1n} x_n \leq b_1 \\ \quad\quad | \\ a_{m1} x_1 + ____ + a_{mn} x_n \leq b_m \end{cases}$$

FORMULAZIONE di MASSIMO (disequazioni)

=> formulazione standard

- allo stesso modo, i precedenti problemi, possono essere riscritti in FORMA MATRICIALE

$$\begin{cases} \min c^T x \\ Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \max c^T x \\ Ax \leq b \end{cases}$$

FORMULAZIONE di MAX.

FORMULAZIONE di MIN