PROF Giandomenico Mastroeni
MAIL giandomenico.mastroeni@unipi.it
STUDIO 347 dip. di Informatica
SITO WEB http://pages.di.unipi.it/mastroiani/ROING.html
LIBRO Pappalardo M., Passacantando M. "Ricerca Operativa" University Ross
ESAME Scritto + orale

RICERCA OPERATIVA

La ricerca operativa parte sempre da un problema reale.

1) Problema reale (es gestione di risorse nel periodo della guerra) ← periodo in cui è nata la materia
2) Modello matematico associato al problema reale:
   ↳ Il problema può essere descritto a parole. Una volta esposto il problema e fornite le informazioni generali, esso deve essere tradotto in un linguaggio matematico facendo delle ipotesi. Ci possono essere più modelli matematici che rappresentano uno stesso problema.

- Problema di ottimizzazione vincolata $\min (\max) f(x), \quad x \in \mathbb{R}$
  $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad K \subseteq \mathbb{R}^n$
  $\max [f(x)] = -\min [-f(x)]$ non c'è differenza concettuale tra un problema di max e uno di min

  $f(x)$ funzione obbiettivo
  K insieme delle soluzioni ammissibili $K := \{x \in \mathbb{R}^n : g(x) \leq 0, h(x) = 0\}$ ove
  $g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \quad g(x) = (g_1(x), \dots, g_m(x))$
  $h: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p \quad h(x) = (h_1(x), \dots, h_p(x))$

  Se $g(x) \leq 0$: $\begin{cases} g_1(x) \leq 0 \\ g_2(x) \leq 0 \\ \vdots \\ g_m(x) \leq 0 \end{cases}$

  PROBLEMA DI PROGRAMMAZIONE LINEARE (funzioni di tipo lineare)

- Programmazione lineare su grafi
  ↳ Se lo spazio $\mathbb{R}^n$ è piccolo, tale problema è di facile risoluzione. Per dimensioni più ampie la cosa si complica.

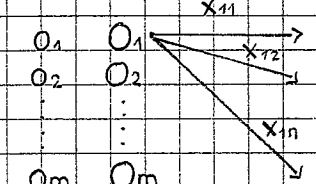
3) Algoritmo risolutivo sequenza di operazioni, istruzioni definite univocamente (dovranno essere eseguite da un computer) che dovranno portare ad una soluzione entro un numero finito di operazioni. Non ha senso proporre un modello matematico per cui non esiste un algoritmo risolutivo.
4) Analisi dei risultati ottenuti vedo se i risultati ottenuti sono soddisfacenti

Definiremo dei modelli piuttosto semplici e studieremo degli algoritmi risolutivi per problemi di programmazione lineare

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

PROBLEMA DI PROGRAMMAZIONE DEI TRASPORTI

I fase dal problema reale a quello matematico



- Sia c_{ij} il costo unitario dei trasporti da O_i a D_j $i = 1, \dots, m \quad j = 1, \dots, n$ Voglio spendere il meno possibile per trasportare il carburante

O_m ↳ dove sono situate q.tà di carburante nelle cisterne da trasportare nei distributori
D_n ↳ destinaz
d_m → capacità di ricezione

Definiamo x_{ij} la quantità di materiale da trasportare da O_i a D_j (incognita), avrò quindi $m \cdot n$ variabili.
Vogliamo ora modellizzare il problema e servono delle ipotesi

- Ipotesi iniziale: $\sum_{i=1}^{m} O_i = \sum_{j=1}^{n} d_j$ posso trasferire tutto il materiale dalle origini alle destinazioni. Alla fine origini vuote e destinazioni piene

$\min \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$ è la funzione obbiettivo (voglio minimizzare il costo compl.)

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{j=1}^{n} x_{1j} = O_1 \\ &\sum_{j=1}^{n} x_{2j} = O_2 \\ &\vdots \\ &\sum_{j=1}^{n} x_{mj} = O_m \end{aligned}\right\} \quad \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = O_i \qquad i = 1, \dots, m$$

La somma delle quantità uscenti da un'origine deve essere uguale alla quantità contenuta in una determinata cisterna

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{m} x_{i1} = d_1 \\ &\sum_{i=1}^{m} x_{i2} = d_2 \\ &\vdots \\ &\sum_{i=1}^{m} x_{im} = d_n \end{aligned}\right\} \quad \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = d_j \qquad j = 1, \dots, n$$

Vincoli

Tutto ciò che arriva ad esempio in d_1 avrà come indice 1. La somma di queste quantità deve essere uguale a d_1

(Per scrivere i vincoli mi concentro sul particolare e poi ricavo il vincolo generale)

$x_{ij} \geq 0 \quad i = 1, \dots, m \quad j = 1, \dots, n$ Le quantità devono essere positive

Se non valesse l'ipotesi iniziale ma fosse:

- Ipotesi $\sum_{i=1}^{m} O_i < \sum_{j=1}^{n} d_j$ Le origini si svuotano ma le destinazioni non si riempiono

Devo modificare il secondo vincolo:

$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} \leq d_j \quad j = 1, \dots, n$ I vincoli devono essere nella forma $\geq$, $\leq$ altrimenti avrei un intervallo aperto e potrei non avere max/min

Se valesse invece la seguente

- Ipotesi $\sum_{i=1}^{m} O_i > \sum_{j=1}^{n} d_j$ Le origini non si svuotano ma le destinazioni si riempiono

Devo modificare il primo vincolo mentre il secondo vincolo resta uguale al I caso

$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leq O_i \qquad i = 1, \dots, m$

I vincoli devono essere sempre rispettati

<u>Esercizio</u>

S_1, S_2, S_3 sono 3 supermercati
F_1, F_2 sono 2 fornitori di latte

	S_1	S_2	S_3	O
F_1	5	3	2	100 (hl)
F_2	4	5	3	80 (hl)
D	70 (hl)	80 (hl)	90 (hl)	

costi di approvv. — cap. fornitori — cap. supermercati

Non è possibile soddisfare la domanda dei supermercati

x_{ij} quantità fornita da F_i a S_j $\quad i = 1,2 \quad j = 1,2,3$

Osserviamo che $\sum_{i=1}^{2} o_i < \sum_{j=1}^{3} d_j$

$$\begin{cases} \min [5x_{11} + 3x_{12} + 2x_{13} + 4x_{21} + 5x_{22} + 3x_{23}] \\ x_{11} + x_{12} + x_{13} = 100 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} = 80 \\ x_{11} + x_{21} \leq 70 \\ x_{12} + x_{22} \leq 80 \\ x_{13} + x_{23} \leq 90 \\ x_{ij} \geq 0 \quad i = 1,2 \quad j = 1,2,3 \end{cases}$$

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

Abbiamo quindi introdotto 3 fasi

1) Modellizzazione problema reale

2) Definizione dei dati

3) Ipotesi di linearità

PROBLEMA DI PRODUZIONE

- $A_1, A_2, \ldots, A_n$ oggetti che si vogliono produrre
- C_j profitto unitario derivato dalla vendita dell'oggetto di tipo j
- m risorse a disposizione $B_1, B_2, \ldots, B_m$ nelle quantità $b_1, b_2, \ldots, b_m$
- a_{ij} è la quantità risorsa Besima necessaria a produrre un oggetto di tipo A_j $\quad i = 1, \ldots, m, \; j = 1, \ldots, n$
- Voglio massimizzare il profitto

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

x_j q.tà di oggetti di tipo A_j da produrre $\quad j = 1, \ldots, n$

$x = (x_1, \ldots, x_n)^T$ vettore delle incognite

$\max \sum_{j=1}^{n} C_j x_j$ funzione obbiettivo

Devo adesso trovare i vincoli e per farlo considero una singola risorsa e la analizzo, cercando poi di ricavare un vincolo generale

$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j$ quantità di risorsa i-esima che mi serve per il prodotto j

$\hookrightarrow \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i$ la quantità non deve eccedere la quantità di risorsa disp. $i = 1, \ldots, m$

vincoli $\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \\ x_{ij} \geq 0, \; j = 1, \ldots, n \end{cases}$ si parla sempre di quantità positive

PROBLEMA DI PROGRAMMAZIONE LINEARE (PL) in forma standard

$$\begin{cases} \max \sum_{j=1}^{n} c_j x_j & \text{Funzione obiettivo} \\ a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \le b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \le b_2 & \text{vincoli} \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \le b_m \end{cases}$$

Posso sempre porre un problema di PL nella forma standard con max e con vincoli di tipo $\le$

a_{ij} = risorsa di tipo i necessaria per produrre j $(i = 1, \dots, m)(j = 1, \dots n)$

$$h(x) = 0 \sim \begin{matrix} h_i(x) \ge 0 \Rightarrow -h_i(x) \le 0 \\ h_i(x) \le 0 \end{matrix}$$

$$\min f(x) = -\max[-f(x)]$$

▷ Scriviamo il problema in forma compatta usando la notazione matriciale:

$$c = (c_1, \dots, c_n)^T, \quad x = (x_1, \dots, x_n)^T \text{ (vettore incognite)}, \quad A = [a_{ij}]_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots}}, \quad b = (b_1, \dots, b_m)^T$$

▷ Quindi: $\begin{cases} \max (c^T x) \\ Ax \le b \end{cases}$ Formulazione standard del problema $(\mathcal{P})$

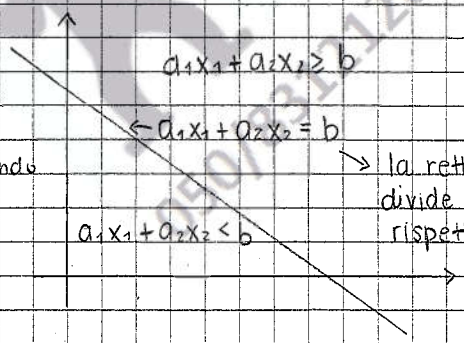
$P : \{ x \in \mathbb{R}^n : Ax \le b \}$ Regione ammissibile

Bisogna studiare P per risolvere il problema: tale regione è un POLIEDRO.

Poliedro: un insieme $P \subseteq \mathbb{R}^n$ si dice poliedro se è l'intersezione di un numero finito di semispazi chiusi in $\mathbb{R}^n$

Facendo un sistema per le disuguaglianze si ottiene un'intersezione tra le disuguaglianze e quindi tra semispazi (secondo la def. di semispazio) cioè un poliedro

Semispazio in $\mathbb{R}^2$



$a_1x_1 + a_2x_2 \ge b$

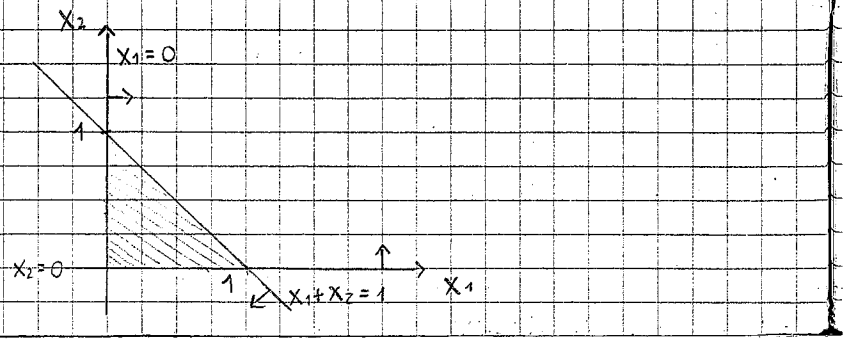
la retta divide il piano in 2 semispazi, uno che rispetta la disuguaglianza e l'altro no

Semispazio: insieme di soluzioni di una disequazione lineare della forma $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n \le b$

Esempio

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 1 \\ -x_1 \le 0 \\ -x_2 \le 0 \end{cases}$$

guardo qual è il semispazio che contiene l'origine per considerare il semispazio che mi interessa

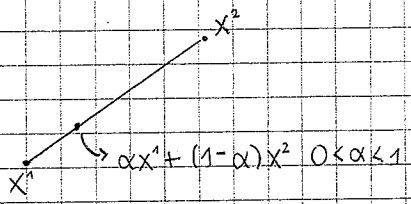


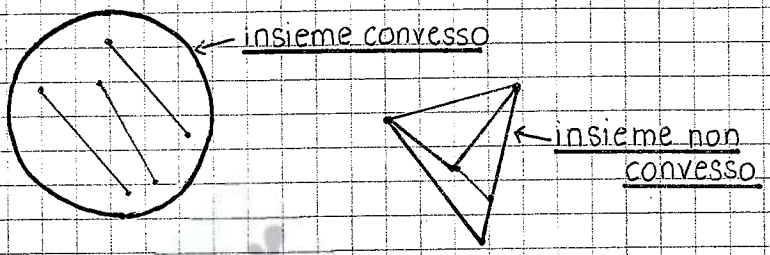
Studiamo ora le proprietà dei poliedri, per farlo vediamo dei concetti

Insieme convesso: Un insieme K in $\mathbb{R}^n$ si dice convesso se $\forall x^1, x^2 \in K$ e $\forall 0 \leq \alpha \leq 1$ si ha $\alpha x^1 + (1-\alpha)x^2 \in K$ $(X = X^1 + X^2 + \dots + X^n)$

In altre parole, se K contiene due punti x^1 e x^2 allora contiene anche tutto il segmento di estremi x^1 e x^2

(Intersezioni di insiemi convessi sono insiemi convessi)





Proprietà: P è un insieme convesso essendo intersezione di insiemi convessi (un semispazio è infatti convesso)

Involucro convesso: dato $K \subseteq \mathbb{R}^n$ si dice involucro convesso di K $conv(K)$ l'intersezione di tutti gli insiemi convessi contenenti K

È in pratica il più piccolo insieme convesso che contiene K
K è convesso se coincide con il suo involucro convesso



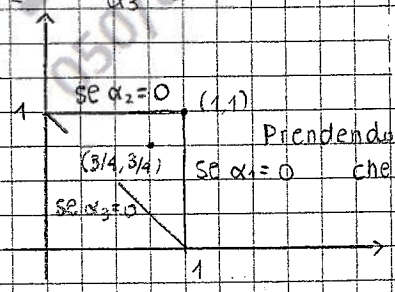
MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

Combinazione convessa: Un punto $y \in \mathbb{R}^n$ si dice combinazione convessa dei punti $X^1, \dots, X^m \in \mathbb{R}^n$ se esistono $\alpha_i \geq 0$ $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i = 1$ tale che $y = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i X^i$

somma vettori $x_1, \dots, x_m$ ciascuno moltiplicato x un fattore ≥ 0 e ≤ 1

$$\frac{1}{4}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} + \frac{1}{4}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3/4\\3/4\end{pmatrix}$$

α_1 α_2 α_3



Prendendo $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 > 0$ ottengo un segmento che sta dentro il triangolo. Prendendo tutti i possibili $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ ottengo tutto il triangolo e quindi l'involucro convesso contenente i tre punti

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

Teorema: L'involucro convesso $conv(K)$ di un insieme K eguaglia l'insieme di tutte le possibili combinazioni convesse di elementi di K

Introduciamo ora il concetto di cono.