26/09

1) PROBLEMA REALE → deve essere ben definito

problemi reali in cui i dati sensibili sono quantificati

(ottenere il massimo profitto da una produz.)
problemi di copertura di turni

RICERCA OPERATIVA → si occupa dello studio di problemi decisionali che partono dalla realtà

che presenta di una quantità di risorse limitate

- possibilità formazione
- scuperme che abbiamo

2) MODELLO MATEMATICO → formulazione di un modello matematico a partire da un problema reale i cui dati sono quantificati

standardizzare degli elementi

strumento di conoscenza (non conosciamo qualcosa, viene presentato un modello)

semplificazione matematica del problema reale

descrivere con linguaggio matematico del problema reale che non sarà mai la realtà vera e propria che non sarà mai il problema reale stesso

$$\min_{x \in \Omega} f(x) \quad \left(\text{o} \quad \max_{x \in \Omega} f(x) \right) \qquad f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$$

problema di minimo o di massimo (minimizzare = massimizzare)

$\min f(x) = -\max(-f(x))$ → non c'è alcuna differenza tra problemi di max e min poiché sono legati da questa relazione

Un problema di programmazione lineare consiste nel trovare il max o il min di una funzione lineare soggetta ad un insieme finito di vincoli lineari di disuguaglianza e uguaglianza

Un algoritmo è una sequenza di istruzioni univocamente determinate che portano in un tempo limitato alla soluzione del problema o ad una sua opportuna approssimazione

Cioè algoritmo determina una particolare sol e non necessariamente tutte le sol possibili del problema. Comunque sono algoritmi mediante i quali viene generata una successione di dati convergente ad una sol ottimale del prob

27/09

PROBLEMA DI ESTREMO VINCOLATO

$\min(\max) f(x) \quad x \in \Omega \qquad f: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R} \qquad \Omega \subseteq \mathbb{R}^m$

Il modello matematico deve essere tale da essere risolto mediante un algoritmo detto ALGORITMO RISOLUTIVO

↳ sequenza di istruzioni che i porti a calcolare in un numero finito di passi la soluzione di un problema

1. PROBLEMA REALE
2. MODELLO MATEMATICO
3. ALGORITMO RISOLUTIVO ⊗

↳ un modello, non ambiguo in un numero finito di passi che ti porta o alla sol o dell'approssimazione della sol del problema o ti porta alla conclusione che il problema non ha sol

La sol trovata è soddisfacente rispetto al problema reale inizio?

4. ANALISI RISULTATI → Riesaminando la formulazione del problema e analizzando il modello si possono eliminare inconvenienti e lacune

problemi che considereremo

FUNZ LINEARI

$f: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ $\quad \Omega \subset \mathbb{R}^m$ $\quad f$ e Ω definiti a mezzo di espressioni lineari uniformi

$\Omega := \{x \in \mathbb{R}^m : h(x) = 0, g(x) \leq 0\}$

definito a mezzo di un sistema di equazioni

$h: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p \quad h = (h_1, h_2, \ldots, h_p)$

$g: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m \quad g = (g_1, g_2 \ldots g_m)$

FUNZIONE LINEARE → $f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$

somma di monomi in cui le variabili compaiono così come sono o non compaiono per niente e sono moltiplicate per delle costanti c_j

FUNZIONI VETTORIALI LINEARI definite mediante matrici

$g(x) := Ax - b$ FUNZ LINEARE AFFINE ↳ somma lineare con l'aggiunta di un vettore

$A \in \mathbb{R}^{m \times m}$ $\quad b = (b_1, \ldots, b_m)^T$

$h(x) = Cx - d \quad C \in \mathbb{R}^{p \times m} \quad d = (d_1, \ldots, d_p)^T$

• Un problema di ottimizzazione consiste nel determinare un punto $x \in R \subseteq X$ che renda minimo (massimo) il valore di una funzione $f: X \to \mathbb{R}$, dove X è un opportuno insieme. Tale problema è indicato con la notazione $\min_{x \in R}(\max_{x \in R}) f(x)$. Dalla relazione $\max_{x \in R} f(x) = -\min_{x \in R}(-f(x))$ segue che il problema della ricerca del massimo può essere ricondotto a quello della ricerca del minimo

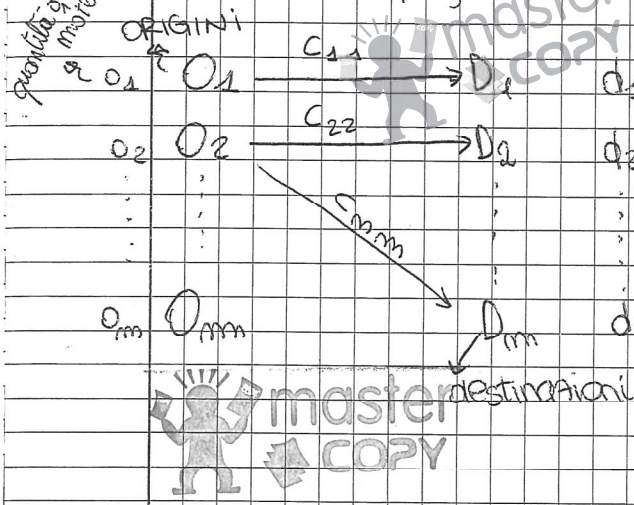
$$\left[R = \{ x \in X : g(x) \leq 0, h(x) = 0 \} \right] \quad \min_{x \in R} f(x) \quad f = \text{funzione obiettivo} \quad g \in \mathbb{R} \text{ FUNZIONI VINCOLARI}$$

PROBLEMA DI PROGRAMMAZIONE MATEMATICA → la regione di definiz

PROBLEMA DI PROGRAMMAZIONE LINEARE ⇒ le funzioni considerate sono prob di prog mat: ma → sono lineari

ESEMPIO

Problema di programmazione di trasporto.



C_{11} costo di trasferimento unitario dall'origine 1 alla destinazione 1

C_{ij} = COSTO DI TRASPORTO UNITARIO DA O_i A D_j $\quad i = 1 \dots m$, $j = 1 \dots n$

Voglio prendere la minor quantità di denaro

Ipotesi di linearità delle funzioni considerate ⇒ ipotesi che faremo sempre

IPOTESI DI LINEARITÀ

→ Devo stabilire le variabili del problema

X_{ij} = QUANTITÀ INCOGNITA DA TRASPORTARE DALL'ORIGINE O_i a D_j $\quad i = 1 \dots m$, $j = 1 \dots n$

numero di variabili $n \times m$

spazio del problema $\mathbb{R}^n$

IPOTESI DI LAVORO (1)

$\sum_{i=1}^{n} \theta_i = \sum_{j=1}^{m} d_j$ la quantità che abbiamo nell'origine è pari alla capienza nelle destinaz

con questa ipotesi Tutto le materie viene trasportato, tutti i magazzini delle destinazioni saranno pieni

Voglio spendere la minima quantità possibile di denaro

$\min \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$ ← FUNZIONE OBIETTIVO

ipotesi di linearità → la quantità da trasportare è direttamente proporzionale al costo

$x_{11} + x_{12} + x_{13} + \dots + x_{1n}$ tutta la quantità di materiale deve partire dalla prima origine

affinché l'origine 1 rimanga vuota questa quantità deve essere pari a a_1

$$\left.\begin{array}{l} x_{11} + x_{12} + x_{13} + \dots x_{1n} = a_1 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + \dots x_{2n} = a_2 \\ x_{m1} + x_{m2} + x_{m3} + \dots + x_{mn} = a_m \end{array}\right\} \begin{array}{l} m \text{ equaz.} \\ \text{vincolari} \\ \downarrow \\ m \text{ vincoli} \end{array}$$

vincoli relativi alle origini

vincoli relativi al fatto che ogni origine si deve svuotare

vincoli relativi alle destinazioni

$x_{11} + x_{21} + \dots + x_{m1} = d_1$

$x_{12} + x_{22} + \dots + x_{m2} = d_2$

$\vdots$

$x_{1n} + x_{2n} + \dots + x_{mn} = d_n$

le destinazioni si devono riempire completamente

Le quantità x_{ij} devono essere positive

$x_{ij} \geq 0 \quad i = 1 \dots m \quad j = 1 \dots n$

IPOTESI $\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} d_j$

vorrò trasportare tutto il materiale ma i magazzini di destinazione non si riempiono totalmente

i vincoli relativi alle origini restano uguali cambiano i vincoli nelle dest.

in questo modo non impongo che le destinazioni si riempiano

$x_{11} + x_{21} + \dots x_{m1} \leq d_1$

$x_{12} + x_{22} + \dots x_{m2} \leq d_2$

$\vdots$

$x_{1n} + x_{2n} + \dots + x_{mn} \leq d_n$

IPOTESI 3 $\sum_{i=1}^{m} o_i > \sum_{j=1}^{n} d_j$

$x_{11} + x_{12} + x_{13} \dots + x_{1n} \leq o_1$

$x_{21} + x_{22} + x_{23} \dots + x_{2n} \leq o_2$

$\vdots$

$x_{m1} + x_{m2} + x_{m3} + \dots + x_{mn} \leq o_3$

$x_{11} + x_{21} + \dots x_{m1} = d_1$

$= d_2$

$\vdots$

d_n

basterebbe la slz n° 1 perché posso supporre un'azienda fittizia in modo da abbia una quantità di mat pari alla differenza che mi riconduce al caso 2

$o_{m+1} = \sum_{j=1}^{n} d_j - \sum_{i=1}^{m} o_i$ con $c_{m+1\,j} = 0$ $j = 1 \dots n$

in modo protetto riempio quelle destinazioni che nel caso 2 non avevano ricevuto niente

È possibile ricondurci alla slz n° 1 aggiungendo aziende fittizie (caso 2) o destinazioni fitt. (caso 2) che vadano a avere capacità di ricez o di desti pari al sup plus che abbiamo

→ considero solo lo 1° vincolo trasformando il problema con l'aggiunta di fittizie e il costo di trasporto delle fittizie deve sempre essere pari a 0

Considero fittizie 3 i così

—o—

ESERCIZIO

3 SUPERMERCATI S_1, S_2, S_3

FORNITORI di latte F_1, F_2,

costi unitari per ettolitro di latte	S_1	S_2	S_3	0 → offerta fornitore
F_1	5	3	2	100
F_2	4	5	3	80
D	70	80	30	

domanda dei sup

Domanda → 240

Offerta → 180

→ tabella costi di approvvigionamento di ciascun sup

Determinare un piano di approv in modo che il costo totale di approvvigionamento sia il minimo