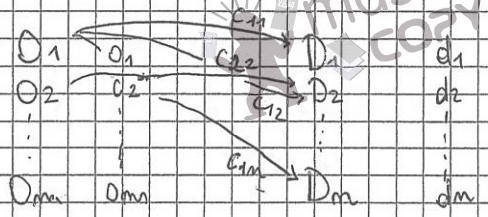
RICERCA OPERATIVA

MODELLO → formulazione in termini matematici del problema
Non coincide con il problema, è una sua esemplificazione

funzione obiettivo sarà sempre LINEARE

PROBLEMA DI PROGRAMMAZIONE DEI TRASPORTI



Ulteriore ipotesi $\sum_{i=1}^{m} O_i = \sum_{j=1}^{n} d_j$ quantità trasportata = q che è possibile immagazzinare

x_{ij} variabili che rappresentano la quantità che vogliamo trasportare da D_i a O_j

COSTO COMPLESSIVO

$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} C_{ij} x_{ij}$ → funzione obiettivo da massimizzare

$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = O_i$ $\quad i = 1, \dots, m$

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} + \dots + x_{1n} = O_1 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + \dots + x_{2n} = O_2 \\ \vdots \\ x_{m1} + x_{m2} + \dots + \dots + x_{mn} = O_m \end{cases}$$

→ VINCOLI RELATIVI ALLE ORIGINI

Tutto il materiale presente in O_1 viene trasferito nelle destinazioni

↳ forma compatta

La quantità di materiale trasferito dalla origine O_i in D_1 coincidera con la capienza di D_1

VINCOLI RELATIVI ALLE DESTINAZIONI

$$\begin{cases} x_{11} + x_{21} + x_{31} + \dots + x_{m1} = d_1 \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} + \dots + x_{m2} = d_2 \\ \vdots \\ x_{1n} + x_{2n} + x_{3n} + \dots + x_{mn} = d_n \end{cases} \quad \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = d_j \quad j = 1, \dots, n$$

Tutte le variabili $x_{ij} \geq 0$ $\quad i = 1, \dots, m \quad j = 1, \dots, m$

i = offerta delle origini $\quad$ j = domande delle destinazioni

ESERCIZIO

le discariche D_1, D_2, D_3 sono le destinazioni

$d_1, d_2, \dots d_n$ sono le capacità di smaltimento $\quad n = 3$

O_1, O_2 sono le capacità dei rifiuti

VETTORE DELLE VARIABILI → abbiamo 6 variabili x_{11} = trasferimento da O_1 a D_1
2 origini e 3 destinazioni $\quad x_{21}$ = trasf da O_2 a D_1

$$\begin{cases} \min[5x_{11} + 3x_{12} + 4x_{13} + 4x_{21} + 7x_{22} + 3x_{23}] \quad \text{funzione obiettivo} \\ (\sum o_i < \sum d_j) \quad \text{la quantità dei rifiuti da smaltire sono } \geq, <, = \text{ della capacità delle discariche} \\ \text{Sono minori in questo caso} \\ x_{11} + x_{12} + x_{13} = 120 \quad \text{(quantità rifiuti azienda } A_1\text{)} \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} = 230 \quad \Big\} \text{ vincoli relativi alle origini} \\ x_{11} + x_{21} \leq 200 \\ x_{12} + x_{22} \leq 150 \\ x_{13} + x_{23} \leq 100 \quad \Big\} \text{ vincoli delle destinazioni} \\ x_{ij} \geq 0 \quad i = 1,2 \quad j = 1,2,3 \end{cases}$$

C'è soluzione? Il sistema ammette soluzione perché ho possibilità di effettuare il trasferimento perché $\sum o_i < \sum d_j$

Posso considerare la 1° origine, trasferire e saturare la 1° destinazione e andare avanti così
↳ Soluzione concreta

Avrà ottimo finito questo problema? Nella regione ammissibile la funzione obiettivo NON può tendere a $-\infty$ perché avrà sicuramente segno positivo ed è inferiormente limitata

ANALISI CONVESSA

POLIEDRO ↦ Regione ammissibile problema di programmazione lineare

Combinazione convessa → segmento che unisce due punti

Conv(K) [intersezione di tutti i convessi che contengono K]

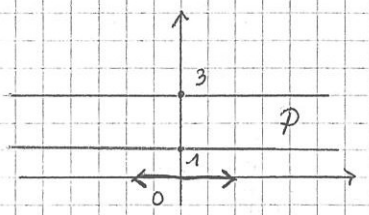
Inviluppo conico ⟷ intersezione dei (tutti i) coni convessi che contengono l'insieme K

Combinazione conica è un caso particolare di una combinazione conica

DIREZIONE di RECESSIONE

Se prendo un punto qualunque del poliedro e gli applico il vettore $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ rimango nel poliedro stesso. Anche con $\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}$

$\Rightarrow \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}$ sono 1 (le uniche due) DIREZIONI DI RECESSIONE per il poliedro P



$P = \{ -1 \leq x_2 \leq 3$

es 4 P_1 ⟷ no direzioni di recessione perché limitato

P_2 ⟷ direzioni di recessione $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \ldots$

$rec(P_2)$

da $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ a raggiungere $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ TUTTE sono V direzioni di recessione

Vettori che hanno entrambe le componenti POSITIVE! (≥ 0)

TEOREMA di RAPPRESENTAZIONE dei POLIEDRI

E' sempre possibile rappresentare un poliedro tramite insieme V e insieme E

Supponendo che l'insieme E non contenga vettore nullo

① Se $vert(P) \neq 0$ [P ammette vertici] $V = vert(P)$ { in V ho punti che non possono essere espressi come combinazione convessa di altri punti }

② $cono(E) \equiv rec(P)$

③ Se P limitato non ho direzioni di recessione $\Rightarrow P = conv(V) = conv(vert(P))$

Es 9 - 10 - 11

P_1 espresso come combinazione convessa dei vertici

↳ perché limitato

P_2 → unico vertice è l'origine ma insieme V può essere omesso perché se conv(V) è dato solo dal vettore nullo nella rappresentazione ho solo cono(E).

Devo considerare la direzione di recessione del poliedro:

↳ Ogni punto del cono definisce una direzione di recessione perché è un cono poliedrico ⇓ convesso

DIREZIONI $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ sono DIREZIONI di RECESSIONE ESTREME

P_3 → Vertici del poliedro (1,2) e (2,1)

Direzioni di recessione estreme (0,1) e (1,0)

$$P_3 = \underbrace{conv((1,2),(2,1))}_{\text{segmento che unisce i due punti}} + \underbrace{cono((1,0),(0,1))}_{\text{primo quadrante}}$$

Prendo un qualsiasi punto del segmento come origine e disegno primo quadrante e lo faccio per tutti i punti del segmento

↳ ottengo P_3

CONSEGUENZE DUALITÀ DEBOLE Dim per Assurdo:

(ii) Se ci fosse $\bar{x} \in P$, avrei $y^T b \geq c^T \bar{x} \quad \forall y \in D$

$\Rightarrow$ funzione obiettivo sarebbe inf limitata $\Rightarrow$ ha ottimo finito (minimo del problema)

D non è illimitato inferiormente

(i) Se $\exists \bar{y} \in D$, avrei $c^T x \leq \bar{y}^T b \quad \forall x \in P$

$\Rightarrow$ P superiormente limitato





DUALITÀ SEMPLICE

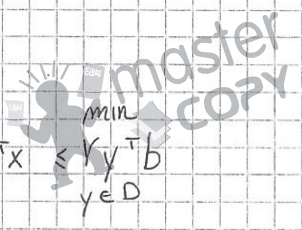
$-c^T x \leq y^T b \quad \forall x \in P, \forall y \in D$

$\rightarrow \max_{x \in P} c^T x \leq y^T b, \quad \forall y \in D \quad *$

OSS! Dato $\bar{y} \in D$ il valore $\bar{y}^T b$ è una stima del valore ottimo del problema (P), ossia risulta $\max_{x \in P} c^T x \leq \bar{y}^T b$

Analogamente dato $\bar{x} \in P$ risulta che $c^T \bar{x} \leq y^T b \quad \forall y \in D$

per cui $c^T \bar{x} \leq \min_{y \in D} y^T b$



* Da questa relazione segue anche $\max_{x \in P} c^T x \leq \min_{y \in D} y^T b$

