Ricerca Operativa. - Mastroeni

giandomenico.mastroeni@unipi.it studio 347 dip. inform

pagina: http://pages.di.unipi/mastroeni/ROINGA.html

testo: Pappalardo M., : Ricerca Operativa, University Press

NO prove intermedie

Ricevimento...

Introduzione:

Nasce dalla necessità di ottimizzare i consumi di risorse. Si parte sempre da un problema reale, di ambito bellico o organizzativo (percorso più breve, ottimale). Questo presuppone un obiettivo che sia di costo, lunghezza o utilità.

Da questo si crea un modello matematico del problema. Con modello matematico si intende una descrizione del problema utilizzando un linguaggio matematico. Esempi di modelli matematici sono:

- Problemi di ottimizzazione vincolata:

$$\max, \min \ (f(x)), \text{ vincoli: } x \in \mathbb{K} \subseteq K$$

con $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $K \subseteq \mathbb{R}^n$ K = insieme campione

si definisce $\mathbb{K}$ come l'insieme ammissibile del problema → viene definito come un insieme di soluzioni di un sistema di equazioni. ($\max(f) = -\min(-f)$)

$$\mathbb{K} = \{ x \in \mathbb{R}^n : g(x) \leq 0, h(x) = 0 \} \text{ con } g(x): \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

è un vettore di funzioni (m) ciascuna con n variabili.

$$g(x) \rightsquigarrow \begin{cases} g_1(x) \leq 0 \\ \vdots \\ g_m(x) \leq 0 \end{cases}$$

$$h(x): \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$$

$$h(x) \rightsquigarrow \begin{cases} h_1(x) = 0 \\ \vdots \\ h_p(x) = 0 \end{cases}$$

In questi casi si parla di **programmazione matematica**.

Se l'insieme di funzioni è costituito da polinomi, il sistema è lineare → siamo nel problema di programmazione **Lineare**

Una volta scritto il modello matematico, si passa alla risoluzione del problema attraverso un algoritmo risolutivo. Attraverso una sequenza di istruzioni, che sia finita, dovrò arrivare alla soluzione del problema o a una sua approssimazione.

Quando ho trovato la soluzione matematica, va analizzata in modo da valutarne efficienza Potremmo essere costretti ad approssimare o aggiornare la soluzione, cambiando i dati o le iterazioni o interpretando la risposta del modello in una chiave più funzionale alla realtà.

Esempio: Programmazione dei trasporti:
Poste n origini $O_1, \dots, O_m$ e quantità omogenee $o_1, \dots, o_n$

disponibilità ← ricezione

o_1 O_1 D_1 d_1

o_2 O_2 D_2 d_2

$\vdots$ $\vdots$

o_n O_m D_n d_n

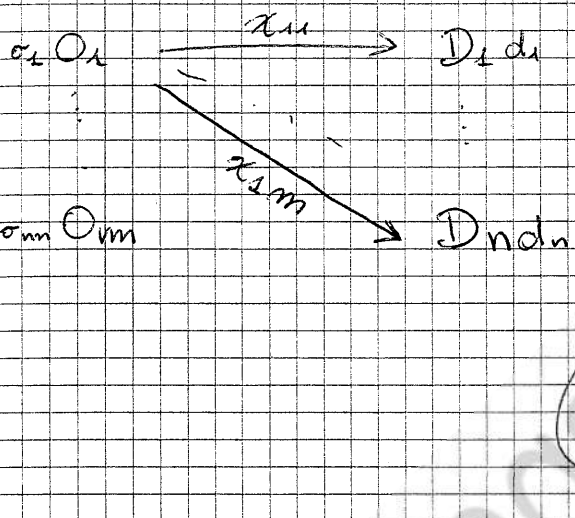
si definisce c_{ij} il costo unitario di trasporto da O_i a D_j $(i = 1, \dots, m,\ j = 1, \dots, n)$
si definisce x_{ij} la quantità di materiale da trasportare da O_i a D_j

Avrò quindi $m \cdot n$ variabili.
Viene anche supposto che $\sum_{1}^{m} o_i = \sum_{1}^{n} d_j$, cioè che posso trasferire tutto il materiale.

Volendo minimizzare il costo totale: $\sum c_{ij} \cdot x_{ij}$, esse vanno però sommate:

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij}\, x_{ij} \longleftarrow \text{va minimizzata è il nostro obiettivo}$$

Consideriamo i trasporti da O_1:



alla fine O_1 sarà vuoto.

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_{1j} = O_1 \\ \sum_{j=1}^{n} x_{2j} = O_2 \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} x_{mj} = O_m \end{cases}$$

$$\Rightarrow \sum x_{ij} = o_i \quad \text{con } i = 1, \dots, m$$

Anche tutte le destinazioni si dovranno riempire:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{m} x_{i1} = d_1 \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{m} x_{in} = d_n \end{cases} \Rightarrow \sum x_{ij} = d_j \quad \text{con } j = 1, \dots, n$$

Linearità → proporzionalità diretta

Considerando ora tutte le origini, una per una. È da qui che si ottengono i vincoli di origine e destinazione:

Vincolo svuotamento: $\sum_{i=1,\dots,m} x_{ij} = o_i$

Vincolo riempimento: $\sum_{j=1,\dots,n} x_{ij} = d_j$

Esiste un vincolo che può sembrare ovvio, ma fondamentale in fase di esecuzione dell'algoritmo:

$$x_{ij} \geq 0$$

esercizio:

PREMESSA

- condizione 1 (uguaglianza): $\sum o_i = \sum d_j$
- condizione 2 (minoranza): $\sum o_i < \sum d_j$

la capacità produttiva è minore di quella di deposito $\Rightarrow$ (NON) tutte le destinazioni saranno piene. Vale il vincolo di svuotamento, ma NON quello di riempimento, il quale avrà un minore o uguale. Infatti in ogni destinazione ci sarà una quantità minore o uguale a quella unita.

$\sum x_{ij} \leq d_j$

- condizione 3 (maggioranza): $\sum o_i > \sum d_j$

è il caso speculare di quello visto sopra; varrà il vincolo di riempimento ma non quello di svuotamento, il quale avrà un minore o uguale:

$\sum x_{ij} \leq o_i$

Fornitori F_i — Superi: S_j

F_1

F_2

costo appr.:

S_1

S_2

S_3

	S_1	S_2	S_3	o_i
F_1	5€	3€	2€	100hl
F_2	4€	5€	3€	80hl
d_j	70hl	80hl	90hl	

Detta x_{ij} quantità fornita $\Rightarrow$ 6 variabili

Osserviamo che somme di $\sum o_i < \sum d_j$

$$\min \left[5x_{11} + 3x_{12} + 2x_{13} + 4x_{21} + 5x_{22} + 3x_{23} \right] \quad (\in \mathbb{R}^6)$$

$$\left.\begin{aligned} o_{F_1} &= x_{11} + x_{12} + x_{13} = 100 \\ o_{F_2} &= x_{21} + x_{22} + x_{23} = 80 \end{aligned}\right\} \text{vincoli fornitori}$$

$$\left.\begin{aligned} x_{11} + x_{21} &\leq 70 \\ x_{12} + x_{22} &\leq 80 \\ x_{13} + x_{23} &\leq 90 \end{aligned}\right\} \text{ vincoli supermercati.}$$

Si nota che siamo nella condizione 2.

Esempio 2 PROBLEMA di PRODUZIONE:

Vogliamo produrre n oggetti $A_1, \ldots, A_n$ con c_j profitto unitario e m risorse $B_1, \ldots, B_m$ nelle quantità b_j sapendo che a_{ij} è la quantità di risorse (B) che uso per produrre l'oggetto A_n.
Come scelgo la linea di produzione per massimizzare il profitto?
Definiamo x_j come quantità di oggetti di ciascun tipo A_j da produrre ($j = 1, \ldots, n$)
$x = (x_1, \ldots, x_n)^T$ ← è colonna!

Modello: $\max \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_j c_j$

Vincoli: risorsa i-esima B_i usa quantità a_{ij} per produrre x_j di A_j uso $x_j a_{ij}$
per produrli tutti: $\sum_{j}^{n} x_j a_{ij} \leq b_i$
↑ quella che uniscono per produrre x_j di A_j ↑ quella di cui dispongo

(Vincolo variabili $\in \mathbb{R}^+$)

$$\begin{cases} \max \sum_{i} \sum_{j} x_j c_j \\ \sum x_j a_{ij} \leq b_i \\ x_j, a_{ij}, b_i \geq 0 \quad \forall i = 1, \ldots, m \\ \qquad\qquad\quad j = 1, \ldots, n \end{cases}$$
← potrebbe essere ridondante, ma metterlo!