RICERCA OPERATIVA

Disciplina di carattere matematico che ha come punto di partenza un PROBLEMA REALE.

↳ Problema che coinvolge dati QUANTIFICABILI

Si occupa di prendere decisioni avendo RISORSE LIMITATE e AMMISSIBILI.

a deve essere CORRELAZIONE

$(\min F(x) = -\max(-F(x))$

① PROBLEMA REALE

② MODELLO MATEMATICO $\left[\min_{x\in\Omega} F(x) \text{ o } \max_{x\in\Omega} F(x) \quad F(x): \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \text{ con } \Omega \in \mathbb{R}^n\right]$

↑ sequenza di istruzioni determinate in modo univoco che porta in un numero finito di passi alla soluzione del problema

③ ALGORITMO RISOLUTIVO : per risolvere il modello matematico

④ ANALISI DEI RISULTATI: prendere in considerazione i vari casi non possiamo essere sicuri

PROBLEMA DI PROGRAMMAZIONE LINEARE

Le funzioni prese in considerazione sono funzioni lineari: (funzione di grado 1; il cui grafico coincide con una retta)

$\min_{x\in\Omega}$ (o $\max$) $F(x)$ → FUNZIONE OBIETTIVO $\quad F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \ \Omega \in \mathbb{R}^n$

$\Omega := \{x \in \mathbb{R}^n : h(x) = 0, \ g(x) \leq 0\}$ $\quad h: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p \ h = (h_1 \dots h_p)$ $\quad g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \ g = (g_1 \dots g_m)$

(FUNZIONI VETTORIALI)

Le funz. vett. possono essere definite come matrici:

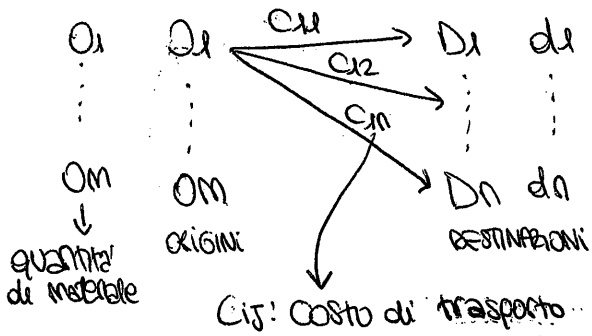
$g(x) := Ax - b \quad A \in \mathbb{R}^{m \times n}, \ b = (b_1, \dots, b_m)^T$

$h(x) := Cx - d \quad C \in \mathbb{R}^{p \times n}, \ d = (d_1, \dots, d_p)^T$

È un problema di OTTIMIZZAZIONE lineare che coinvolge applicazioni lineari nei problemi vincolati al fine di trovare un valore ottimo della funzione obiettivo

master COPY

PROBLEMA DI PROGRAMMAZIONE DEI TRASPORTI



Spazio di partenza: $\mathbb{R}^{m \times n}$

→ Voglio sapere il minimo costo di trasferimento

C_{ij}: costo di trasporto unitario da O_i a D_j, $i = 1 \dots m$, $j = 1 \dots n$

VARIABILI DECISIONALI

X_{ij}: quantità incognita di materiale da trasportare da O_i a D_j

- IPOTESI ①

$$\sum_{i=1}^{m} O_i = \sum_{j=1}^{n} d_j \rightarrow \text{capienza destinazioni}$$

↓ quantità di materiale nelle origini

MODELLO ①

$$\min \left(\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} C_{ij} X_{ij} \right) \quad \text{FUNZIONE OBIETTIVO}$$

$$\left.\begin{aligned} X_{11} + X_{12} + \dots + X_{1n} &= O_1 \\ X_{21} + X_{22} + \dots + X_{2n} &= O_2 \\ &\vdots \\ X_{m1} + X_{m2} + \dots + X_{mn} &= O_m \end{aligned}\right\} \text{VINCOLO ORIGINE: ogni sorgente si deve svuotare}$$

$$\left.\begin{aligned} X_{11} + X_{21} + \dots + X_{m1} &= d_1 \\ X_{12} + X_{22} + \dots + X_{m2} &= d_2 \\ &\vdots \\ X_{1n} + X_{2n} + \dots + X_{mn} &= d_n \end{aligned}\right\} \text{VINCOLO DESTINAZ: ogni mina si deve riempire}$$

$X_{ij} \geq 0$, $i = 1 \dots m$, $j = 1 \dots n$ VINCOLO VARIABILI: le quantità devono essere positive

POSSO anche definire un origine o destinazione nel caso ③ fittizi pari al SURPLUS di capienza, con costi pari a 0.
($O_{m+1} = \sum_{j=1}^{n} d_j - \sum_{i=1}^{m} O_i$, $C_{m+1,j} = 0$)

- IPOTESI ②

$$\sum_{i=1}^{m} O_i < \sum_{j=1}^{n} d_j \rightarrow \text{NON RIUSCIRÒ A RIEMPIRE LE DESTINAZIONI}$$

$X_{11} + X_{12} + \dots + X_{1n} = O_1$, $X_{11} + X_{21} + \dots + X_{m1} \leq d_1$

- IPOTESI ③

$$\sum_{i=1}^{m} O_i > \sum_{j=1}^{n} d_j \rightarrow \text{NON RIESCO A SVUOTARE LE ORIGINI}$$

$X_{11} + X_{12} + \dots + X_{1n} \leq O_1$, $X_{11} + X_{21} + \dots + X_{m1} = d_1$

PROBLEMA DI PRODUZIONE

- n tipi di oggetti: $A_1 \dots A_n$
- ricavo unitario: $c_1 \dots c_n$ (relativo alla vendita degli ogg.)
- m risorse: $B_1 \dots B_m$
- nelle quantità $b_1 \dots b_m$
- a_{ij} è la quantità di risorse B_i necessaria per produrre unitariamente A_j.

① DEFINIZIONE VARIABILI

x_j quantità di oggetti di tipo A_j da produrre

② FUNZIONE OBIETTIVO

$$\max \left(\sum_{j=1}^{n} x_j c_j \right)$$

③ VINCOLI VARIABILI

$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_1$ quantità di b_1 per produrre l'oggetto di tipo j

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i, \; i = 1 \dots m \\ x_j \geq 0, \; j = 1 \dots n \end{cases}$$

(la quantità di risorse per produrre gli oggetti j deve essere minore della quantità max

$$R := \{ x \in \mathbb{R}^n : \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i, \; i = 1 \dots m, \; j = 1 \dots n, \; x_j \geq 0 \}$$

↳ REGIONE AMMISSIBILE: non è vuota se le risorse sono limitate

PROBLEMA DELL'ASSEGNAMENTO

- $P_1 \dots P_n$ persone devono eseguire i lavori $L_1 \dots L_n$
- c_{ij} retribuzione di P_i per il lavoro L_j, $i = 1 \dots n$, $j = 1 \dots n$
  - ogni lavoro deve essere eseguito
  - ogni persona deve eseguire un lavoro

① DEFINIZ. VARIABILI: $x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } P_i \text{ esegue } L_j \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$

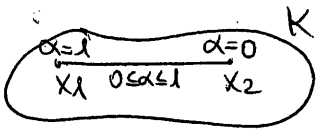
② FUNZ. OBIETTIVO: $\min \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$ (Assegnare lav. al minimo costo

③ VINCOLI VARIABILI:

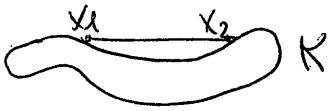
$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, \; j = 1 \dots n & \text{tutti i lavori svolti} \\ \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \; i = 1 \dots n & \text{tutti le pers. fanno un lavoro} \\ x_{ij} \in \{0,1\}, \; i = 1 \dots n, \; j = 1 \dots n \end{cases}$$

INSIEME CONVESSO

Un insieme $K \in \mathbb{R}^n$ si dice CONVESSO se $\forall x_1, x_2 \in K$ risulta $\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2 \in K$, $\forall \alpha: 0 \le \alpha \le 1$



convesso (il segmento $\overline{x_1x_2} \in K$).



non convesso

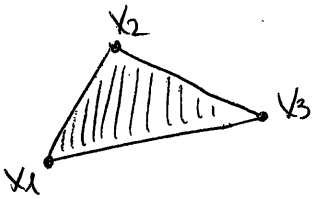
se per ogni coppia di punti il segmento che li unisce $\in K$

L'intersezione di insiemi convessi è un insieme convesso

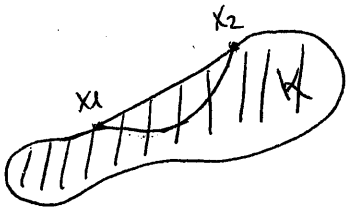
INVOLUCRO CONVESSO

Dato $K \in \mathbb{R}^n$, l'INVOLUCRO convesso di K (CONV(K)) è l'intersezione di tutti gli insiemi convessi contenenti K

$K = \{x_1, x_2, x_3\}$



il più piccolo insieme convesso.



CONV(K)

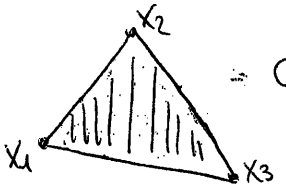
COMBINAZIONE CONVESSA

$y \in \mathbb{R}^n$ si dice COMBINAZIONE CONVESSA di $x_1, x_2 \dots x_m \in \mathbb{R}^n$ se esistono $\alpha_i > 0$ tali che $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i = 1$, per i quali $y = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i x_i$

se y è comb. convessa di x_1 e x_2:

$$\begin{cases} y = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 \\ \alpha_1 + \alpha_2 = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} \alpha_2 = 1 - \alpha_1 \\ y = \alpha_1 x_1 + (1-\alpha_1) x_2 \end{cases}$$

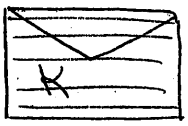
se $0 < \alpha_i < 1$, $i = 1 \dots m$, la comb. convessa si dice PROPRIA.



- comb NON PROPRIA (..il lato)
- comb PROPRIA (..punti interni)

$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3$ $\left(\text{con } 0 < \alpha_i < 1,\ i = 1,2,3\right)$

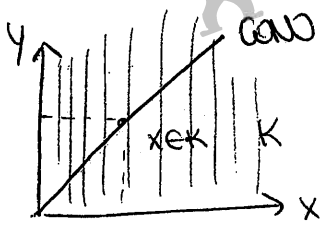
Teorema: L'inviluppo convesso di un insieme K, CONV(K), eguaglia l'insieme di tutte le possibili combinazioni convesse di elementi di K.

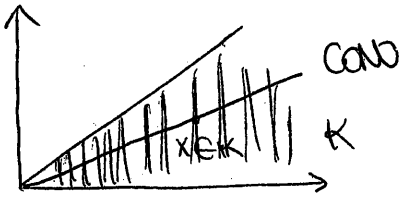


CONV(K)

CONO

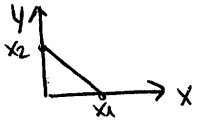
Un insieme K si dice cono se fissato un punto di K, sia $x \in K$, risulta $\lambda x \in K$, $\forall \lambda > 0$.





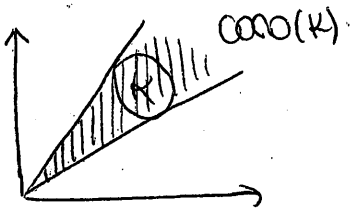
E' cono:
se K contiene un punto $x \neq$ origine allora contiene anche tutta la semiretta uscente da O e passante per x.

∴ insieme degli assi cartesiani è un cono ma non è CONVESSO



INVOLUCRO CONICO

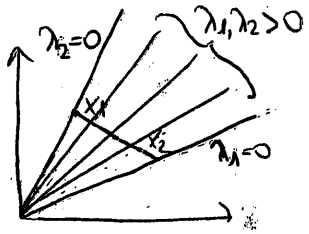
Si dice INVOLUCRO CONICO di K, l'intersezione di tutti i coni convessi contenenti K, e si denota con CONO(K)



- Il CONO(K) coincide con l'insieme di tutte le possibili combinazioni coniche di elementi di K.
(il più piccolo cono convesso che contiene K)

COMBINAZIONE CONICA

$y \in \mathbb{R}^n$ si dice COMBINAZIONE CONICA dei vettori $x_1, x_2 \dots, x_m \in \mathbb{R}^n$ se esistono $\lambda_i \geq 0$, $i = 1, \dots, m$ tali che $y = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i$



$y = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2$

comb. convessa
comb. conica