Ricerca operativa nasce per gestire in maniera ottimale delle risorse.

1) Problema reale
2) Modello Matematico
   ↓
   è una descrizione del problema usando il linguaggio matematico

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

Modelli: — Problemi di ottimizzazione vincolata

$\min (\max) f(x) \quad x \in K \quad f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \ K \subseteq \mathbb{R}^n$

non c'è differenza tra problem di minimizzazione e massimizzazione $\max [f(x)] = -\min [-f(x)]$

l'insieme K ci dice qual è l'insieme delle decisioni ammissibili, $f(x)$ è la funzione obiettivo

$$K := \{ x \in \mathbb{R}^n : g(x) \leq 0, \ h(x) \geq 0 \} \quad \text{dove } g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

$g(x) = (g_1(x), \dots, g_m(x))$

$h: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p, \ h(x) = (h_1(x), \dots, h_p(x))$

la funzione g è un vettore di funzioni

$$g(x) \leq 0 \iff \begin{cases} g_1(x) \leq 0 \\ g_2(x) \leq 0 \\ \vdots \\ g_m(x) \leq 0 \end{cases}$$

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

Un problem così definito è definito problem di programmazione matematica

Cioè un problem di minimizzazione o massimizzazione in cui è presente una regione vincolare definita da sistemi di disequazioni.
Se le funzioni sono lineari i problem sono chiamati di programmazione lineare

GRAFI: consentono delle applicazioni dei problemi reali

3) Algoritmo risolutivo
   ↓
   sequenza di istruzioni ben definite univocamente che permettono la risoluzione del problem in pochi passi (numero finito) (vero solo per le funzioni lineari)

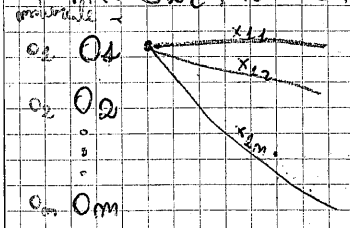
4) Analisi dei risultati ottenuti

Serve a verificare se i risultati son efficienti, se no, farò il modello matematico

↓

è un modello informatico che ha però i suoi limiti

PROBLEMA DI PROGRAMMAZIONE DEI TRASPORTI



- Sia c_{ij} il costo unitario di trasporto da O_i a D_j $\quad i = 1 \dots m$, $j = 1 \dots n$

In questo caso è presente un certo materiale che deve essere trasportato a dei distributori facendo spendere il meno possibile

Definiamo $\boxed{x_{ij}}$ la quantità di materiale da trasportare da O_i a D_j

Devo definire un modello:

- Ipotesi iniziale: $\sum_{i=1}^{m} O_i = \sum_{j=1}^{n} d_j$

↓

devo trasportare tutto dalle origini alle destinazioni

$$\min \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_{ij} c_{ij} x_{ij}$$

$$\left.\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} x_{1j} &= O_1 \\ \sum_{j=1}^{n} x_{2j} &= O_2 \\ &\vdots \\ \sum_{j=1}^{n} x_{mj} &= O_m \end{aligned}\right\} \quad \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = O_i \quad i = 1 \dots m$$

$$\left.\begin{aligned} \sum_{i=1}^{m} x_{i1} &= d_1 \\ &\vdots \\ \sum_{i=1}^{m} x_{in} &= d_n \end{aligned}\right\} \quad \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = d_j \quad j = 1, \dots, n$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad i = 1, \dots, m \quad j = 1, \dots, n$$

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

- Ipotesi 2: $\sum_{i=1}^{m} O_i < \sum_{j=1}^{n} d_j$ posso portare tutto il materiale ma in quelle depositate resterà spazio

$$\min \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \qquad \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = O_i \qquad \sum_{i=1}^{m} x_{ij} \leq d_j \qquad x_{ij} \geq 0$$

- Ipotesi 3 $\sum_{i=1}^{m} O_i \geq \sum_{j=1}^{n} d_j$

$$\min \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \qquad \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = d_j \qquad \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leq O_i$$

28/09/2012

PROBLEMA: Esercizio

Considero 3 supermercati S_1, S_2, S_3 che hanno bisogno di latte da due fornitori F_1 e F_2

	S_1	S_2	S_3	O
F_1	5	3	2	100 hl
F_2	4	5	3	80 hl
D	70	80	90	

x_{ij} quantità fornita da F_i a S_j $\quad i=1,2 \quad j=1,2,3$

OSS: $\sum_{i=1}^{2} o_i \leq \sum_{j=1}^{3} d_j$

$$\min \left[5x_{11} + 3x_{12} + 2x_{13} + 4x_{21} + 6x_{22} + 3x_{23} \right]$$

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} = 100$$
$$x_{21} + x_{22} + x_{23} = 80$$
$$x_{11} + x_{21} \leq 70$$
$$x_{12} + x_{22} \leq 80$$
$$x_{13} + x_{23} \leq 90$$
$$x_{ij} \geq 0 \qquad i=1,2 \quad j=1,2,3$$

MASTER COPY
Tel. 050 831 2126
Cell. 388 9837745

PROBLEMA DI PRODUZIONE

29/09/17

- Si producono oggetti $A_1, A_2, \dots, A_m$
- c_j profitto unitario derivato dalla vendita dell'oggetto di tipo A_j $\quad j = 1, \dots, m$
- Abbiamo m risorse per produrre tali oggetti $B_1, \dots, B_m$ nelle quantità $b_1, \dots, b_m$
- a_{ij} è la quantità di risorsa B_i necessaria per produrre un oggetto di tipo A_j $\quad i = 1, \dots, m \quad j = 1, \dots, m$.
- x_j la quantità di oggetti di tipo A_j da produrre $j = 1, \dots, m$

$x = (x_1, \dots, x_m)^T$

$$\max \sum_{j=1}^{m} c_j x_j$$

Se voglio produrre una quantità x_j di oggetti, di quale risorsa avrò bisogno? a_{ij}

per produrre tutti gli oggetti avrò bisogno di $\sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_j$

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_j \le b_i \quad i = 1, \dots, m$$

$$x_j \ge 0 \quad j = 1, \dots, m$$

PROBLEMA DI PROGRAMMAZIONE LINEARE (PL) in forma STANDARD

$$\max \sum_{j=1}^{m} c_j x_j$$

$$\begin{aligned} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1m} x_m &\le b_1 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2m} x_m &\le b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \dots + a_{mm} x_m &\le b_m \end{aligned}$$

Il vincolo di uguaglianza può essere visto come un coppia di disuguaglianze $\quad h_i(x) = 0 \sim h_i(x) \ge 0 \sim -h_i(x) \le 0$

$h_i(x) \le 0$

$c = (c_1, \dots, c_m)^T \qquad x = (x_1, \dots, x_m)^T$

$A = [a_{ij}]_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,m}} \qquad b = (b_1, \dots, b_m)^T$

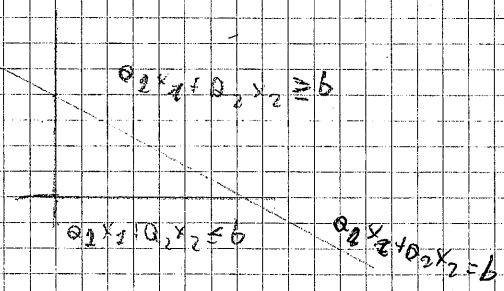
$$\begin{cases} \max (c^T x) \\ Ax \le b \end{cases} \qquad P := \{ x \in \mathbb{R}^m : Ax \le b \}$$ REGIONE AMMISSIBILE

La Regione ammissibile P è un poliedro

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

Def. Un insieme $P \subseteq \mathbb{R}^n$ si dice poliedro se è l'intersezione di un numero finito di semispazi chiusi in $\mathbb{R}^n$

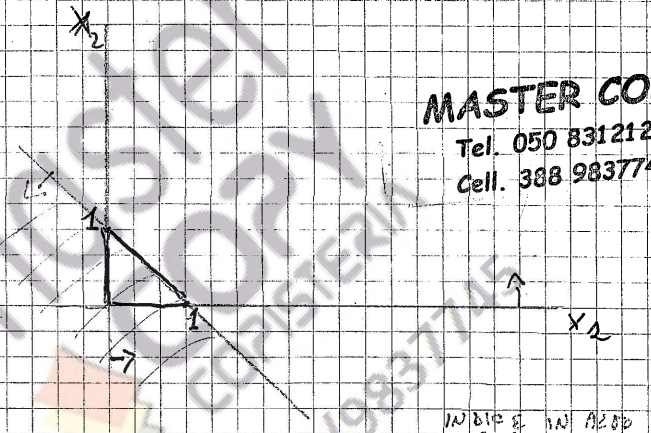
- Un semispazio è l'insieme delle soluzioni di un disequazione lineare della forma $a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n \leq b$



I due semispazi sono chiusi perché le considero anche con la retta inclusa

Esempio

- $\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 2 \\ -x_1 \leq 0 \\ -x_2 \leq 0 \end{cases}$



alla fine il poliedro è il triangolino

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

INSIEME CONVESSO

Def. Un insieme $K \subseteq \mathbb{R}^n$ si dice convesso se $\forall x^1, x^2 \in \mathbb{R}$ e per ogni $0 \leq \alpha \leq 1$ si ha $\alpha x^1 + (1-\alpha) x^2 \in K$

INDICE IN ALTO SIGNIFICA CHE È UN VETTORE

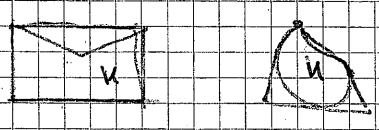


- L'intersezione di insiemi convessi è convessa

PROPRIETÀ DEL POLIEDRO

P è un insieme convesso essendo un'intersezione di insiemi convessi

Def. Dato $K \in \mathbb{R}^n$ si dice inviluppo convesso di K e si denota con "conv (K)" l'intersezione di tutti gli insiemi convessi contenenti K



Def: (combinazione convessa) Un punto $y \in \mathbb{R}^n$ si dice combinazione convessa dei punti $x^1, \dots, x^m \in \mathbb{R}^n$ se esistono $\alpha_i \geq 0$ $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i = 1$, tale che $y = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i x^i$

-