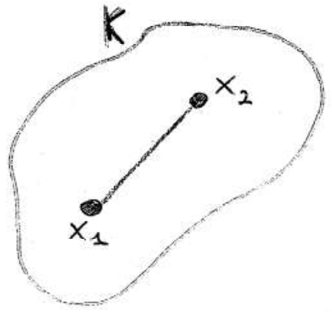
INSIEME CONVESSO: INSIEME CONVESSO

Un insieme $K \subseteq \mathbb{R}^n$ si dice convesso se $\forall x_1, x_2 \in K$ risulta $\alpha x_1 + (1-\alpha) x_2 \in K \quad \forall \alpha \quad 0 \leq \alpha \leq 1$

Si hanno 2 punti x_1 e x_2 che appartengono ad un certo insieme



$$\begin{cases} \alpha = 0 \Rightarrow (1-0)x_2 = x_2 \\ \alpha = 1 \Rightarrow x_1 + (1-1)x_2 = x_1 \end{cases}$$

Al variare di α tra 0 e 1 otteniamo tutti i punti intermedi

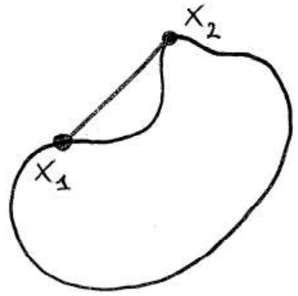
L'insieme K è convesso perché il segmento che unisce x_1 e x_2 è interamente contenuto nell'insieme.

INSIEME NON CONVESSO

INSIEME NON CONVESSO $\Rightarrow$ posso definirne l'involucro convesso

$\mathrm{conv}(K)$ = il più piccolo insieme convesso che contiene K (insieme NON convesso)

INVOLUCRO CONVESSO



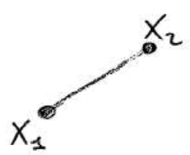
K = insieme NON convesso
↓
il segmento che unisce x_1 e x_2 non si trova nell'insieme K

L'intersezione di un numero arbitrario di insiemi convessi è ancora un insieme convesso (se non è vuoto!)
↳ = è il più piccolo insieme convesso contenente K

INVOLUCRO CONVESSO. Dato $K \subseteq \mathbb{R}^n$, l'involucro convesso di K, che si denota con $\mathrm{conv}(K)$, è l'intersezione di tutti gli insiemi convessi contenenti K

— · — · — · —

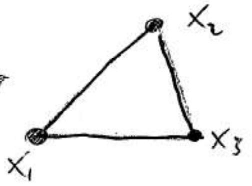
$\underbrace{K = \{x_1, x_2\}}_{\text{insieme costituito da soli 2 punti}}$



il più piccolo insieme convesso che contiene x_1 e x_2 è il segmento che li unisce

$K = \{ x_1, x_2, x_3 \}$

Questo é il più piccolo insieme convesso che contiene i 3 punti



COMBINAZIONE CONVESSA di punti in $\mathbb{R}^n$ ➡ un punto $y \in \mathbb{R}^n$ si dice combinazione convessa di $x_1, x_2, \dots, x_m \in \mathbb{R}^n$ se esistono $\underbrace{\alpha_i \geq 0}_{\text{scalari positivi}}$ tali che $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i = 1$

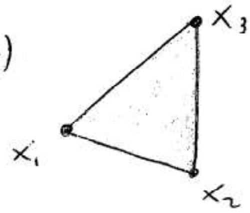
e $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i x_i = y$

y é combinazione convessa di 2 punti x_1 e x_2 $\iff y = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2$, $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$, $\alpha_1, \alpha_2 \geq 0$

La combinazione convessa si dice PROPRIA se $0 < \alpha_i < 1$

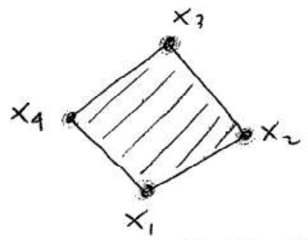
Sono di maggiore interesse le combinazioni convesse proprie.

Le combinazioni convesse (non proprie) ci danno i lati del triangolo...



... mentre le combinazioni convesse proprie i punti interni

master COPY



$K = \{ x_1, x_2, x_3, x_4 \}$ => K = insieme discreto di punti

⇓

NON é convesso

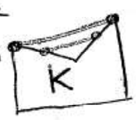
↓ infatti

i segmenti che unisono i punti non appartengono all'insieme K

interno + lati = conv(K)

Teorema: l'involucro convesso di un insieme K eguaglia l'insieme di tutte le possibili combinazioni convesse di elementi di K

Prendo 2 punti e ne faccio le combinazioni convesse



K = insieme non convesso

conv(K) = il più piccolo insieme convesso che contiene K

CONO

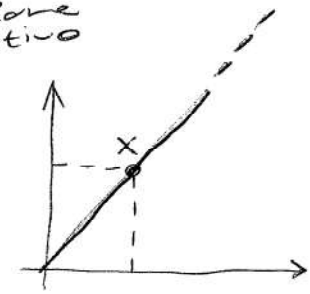
Un insieme K si dice cono se $\forall x \in K$ risulta $\lambda x \in K$ $\underbrace{\lambda \geq 0}_{\text{scalare positivo}}$

↓

<u>NON</u> è un insieme limitato

↓ infatti

deve contenere una semiretta

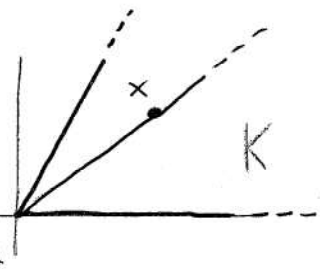


ottengo una semiretta!

Se prendo un punto $x \in K$ la semiretta che parte dall'origine e passa per quel punto è ancora contenuta nell'insieme

⇓

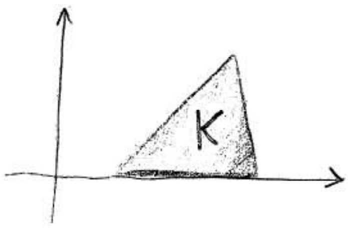
L'insieme K si dice cono



K = cono → insieme illimitato

$x \in K$

I CONI POSSONO ESSERE CONVESSI OPPURE NON CONVESSI



... tale insieme è un cono? NO!!

↓ perché

è un insieme LIMITATO!

— · — · — · —

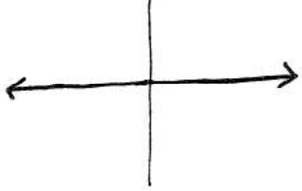
NON APPARTIENE A K

K = i 2 assi colorati di viola

↓

è un cono <u>NON</u> convesso perché il segmento che li unisce non appartiene all'insieme stesso

— · — · — · —



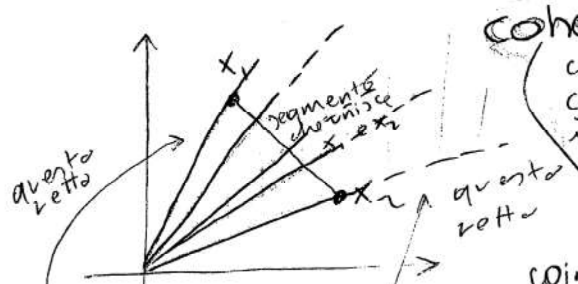
K è un cono perché è unione di 2 semirette :)

INVOLUCRO CONICO

Si dice INVOLUCRO CONICO di K l'intersezione di tutti i coni convessi contenenti K; tale insieme si denota come $\text{cono}(K)$

COMBINAZIONE CONICA di punti $\Rightarrow$ $y \in \mathbb{R}^n$ si dice combinazione (dei punti) conica dei vettori $x_1, x_2, \dots, x_m \in \mathbb{R}^n$ se $\exists \underbrace{\lambda_i \geq 0}_{\text{scalari positivi}}$ $i = 1, \dots, m$ tali che $y = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i$

Ho 2 punti (x_1 e x_2) e mi interessano quelli del tipo $y = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \quad \lambda_1, \lambda_2 \geq 0$



$\text{cono}(K)$ = il più piccolo cono convesso che contiene x_1 e x_2 e il segmento che li unisce

coincide con l'insieme di tutte le possibili combinazioni coniche di elementi di K

Se $\lambda_2 = 0$ $\quad y = \lambda_1 x_1$

Se $\lambda_1 = 0$ $\quad y = \lambda_2 x_2$

I concetti fino ad ora enunciati ci serviranno per il Teorema di Rappresentazione dei Poliedri!

POLIEDRO $\Rightarrow$ Si dice poliedro l'intersezione di un numero finito di semispazi chiusi in $\mathbb{R}^n$

semispazio chiuso $= \{ x \in \mathbb{R}^n : a^T x \leq b$ con $a \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $b \in \mathbb{R} \}$

$a^T x \leq b \iff a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n \leq b$

Soluzione di base primale AMMISSIBILE $\Rightarrow$ soddisfa le disuguaglianze

$$A_N \bar{x} \leq b_N$$

DEGENERE $\Rightarrow$ se esiste un indice $i \in N$ tale che

$$\underbrace{A_i \bar{x} = b_i}_{\text{cioè soddisfa come uguaglianza}}$$

$\bar{x}$ è un vertice $\Leftrightarrow$ $\bar{x}$ è soluz. di base ammissibile

Significato di "Soluz. di base degenere"
- $\nearrow$ = può essere associato a più basi
- $\searrow$ = è rappresentato da più basi

$\Downarrow$ NOTA BENE

ciò ha delle conseguenze perché l'algoritmo esplora le basi!

Se ho più vincoli ciò non significa che la soluzione di base è degenere → i vincoli infatti dovrebbero essere linearm. indip.

Una BASE si dice AMMISSIBILE se la corrispondente soluzione di base è ammissibile; le basi ammissibili ci portano ad ottenere i vertici del poliedro.

~ . ~ . ~ . ~

Dato un problema $\max\limits_{x \in P} c^T x$ $\quad P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$

definiamo il problema duale

PROBLEMA DUALE $= \mathcal{D} \begin{cases} \min y^T b \\ y^T A = c^T \\ y^T \geq 0 \end{cases}$

$$D = \{ y \in \mathbb{R}^m : y^T A = c^T, \; y^T \geq 0 \}$$