RICERCA OPERATIVA

DOCENTE: Giovadomenico Mastroeni

RICEVIMENTO: su prenotazione

ORARIO CORSO: Mercoledì 8:30-10:30 aula F8
Giovedì 8:30-9:30 aula F8
Venerdì 8:30-10:30 aula C21 ← aula B21 ore 14:30-16:30

LIBRO TESTO: Pappalardo, Passacantando, "Ricerca Operativa", ed Pisa University Press, 2012

RICERCA OPERATIVA

27/09/2017

↳ Problemi decisionali sulla gestione di risorse: lo studio nasce durante la seconda guerra mondiale → le problematiche affrontate sono di carattere REALE

1) PROBLEMA REALE → ad esempio la gestione delle risorse militari/industriali ma non solo: affronta problemi di ogni tipo di una persona comune ("percorso più breve").

Collegato ad un obiettivo: minimizzare un costo, un tempo...

2) MODELLO MATEMATICO: la ricerca operativa passa dal problema allo studio del modello matematico associato

→ Dopo aver descritto il problema reale (input e dati) lo descrivo usando un linguaggio matematico

MATEMATICA = forma di linguaggio per descrivere un problema.

Il MODELLO MATEMATICO si basa sui dati già ottenuti relativi al problema.

→ In generale PROBLEMI DI OTTIMIZZAZIONE VINCOLATA

$$\min [\max] f(x), \quad x \in K \quad (*)$$

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $K \subseteq \mathbb{R}^n$ con f = FUNZIONE OBIETTIVO

OSSERVAZIONE: Non esiste differenza concettuale tra (max) e (min) di una funzione

$$\max [f(x)] = -\min [f(x)]$$

$$-\max [-f(x)] = \min [f(x)]$$

⊛ IMPORTANTE: definire $\mathbb{K}$, insieme che descrive i vincoli collegati al problema.

$\mathbb{K}$ è la SOLUZIONE del SISTEMA DI EQUAZIONI E DISEQUAZIONI VINCOLATE

$$\mathbb{K} = \{ x \in \mathbb{R}^n : g(x) \leq 0,\ h(x) = 0 \}$$

dove $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ $\quad g(x) = (g_1(x), \dots, g_m(x))$

e $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ $\quad h(x) = (h_1(x), \dots, h_p(x))$

NOTA BENE: $g(x)$ è una funzione a valori reali

$$g(x) \leq 0 \begin{cases} g_1(x) \leq 0 \\ g_2(x) \leq 0 \\ \vdots \\ g_m(x) \leq 0 \end{cases}$$

Ho #m VINCOLI DI DISUGUAGLIANZA
e
Ho #p VINCOLI DI UGUAGLIANZA

PROBLEMI DI PROGRAMMAZIONE AUTOMATICA → i più semplici sono di tipo LINEARE cioè dove le funzioni sono lineari

TEOREMA DEI GRAFI → studio dei problemi di programmazione matematica sui grafi

3) ALGORITMO RISOLUTIVO

→ sequenza di istruzioni (definite univocamente ed eseguite da un computer) che portano alla risoluzione del problema o ad una sua approssimazione data una sequenza di passi finito.

⇒ Mi consente di trovare la soluzione del problema: occorre sia trovare il MODELLO MATEMATICO sia l'ALGORITMO RISOLUTIVO

4) ANALISI DEI RISULTATI OTTENUTI

→ verificare che la soluzione sia efficace per il problema che ci siamo posti inizialmente.

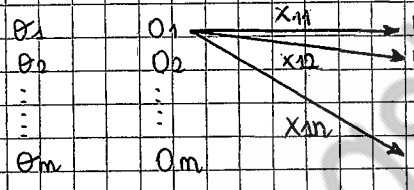
⇒ Se la soluzione NON fosse efficace, dovremo allora modificare il MODELLO MATEMATICO che avevamo proposto!

⊛ NB: IL MODELLO MATEMATICO può FALLIRE!

PROBLEMA DI PROGRAMMAZIONE DEI TRASPORTI

m - ORIGINI $O_1, O_2, \dots, O_m$ per ognuna è disponibile un certo materiale che è omogeneo nelle quantità $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m$

Il materiale dovrà essere trasportato in varie DESTINAZIONI $D_1, D_2, \dots, D_n$ che hanno CAPACITÀ di ricezione $d_1, d_2, \dots, d_n$



Conosco C_{ij} → costo unitario di trasporto (*) da $O_i \rightarrow D_j$ con $i = 1 \dots m$ e $j = 1 \dots n$

OBIETTIVO → trasferire il materiale (tutto?) dalle origini alle destinazioni spendendo il meno possibile

SOLUZIONE passo per passo

① STABILIRE LE VARIABILI: definire x_{ij} la quantità di materiale da trasportare da O_i a D_j

⇒ Avrò $n \times m$ variabili

② IP INIZIALE: $\sum_{i=1}^{m} \sigma_i = \sum_{j=1}^{n} d_j$ ← così trasferirò tutto (*) il materiale

quantità disponibile = quantità richiesta

MODELLO → MINIMIZZARE

$$\min \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} C_{ij} \cdot x_{ij}$$

Considero O_1: $\sum_{j=1}^{n} x_{1j} = \sigma_1$

Considero O_2: $\sum_{j=1}^{n} x_{2j} = \sigma_2$

$\vdots$

O_m $\sum_{j=1}^{n} x_{mj} = \sigma_m$

$\Rightarrow \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = \sigma_i$ con $i = 1 \dots m$ (*)

Considero D_1: $\sum_{i=1}^{m} x_{i1} = d_1$

mentre le O si svuotano, le D si riempiono

$\vdots$

Considero D_n: $\sum_{i=1}^{m} x_{in} = d_n$

$\Rightarrow \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = d_j$ con $j = 1 \dots n$

→ questi sono i vincoli $x_{ij} \geq 0$, $i = 1 \dots m$ e $j = 1 \dots n$

(*) Tra COSTO e QUANTITÀ TRASFERITA si suppone esista una dipendenza lineare (→ PROBLEMI DI PROGRAMMAZIONE LINEARE).

CONDIZIONE n°1 $\sum_{i=1}^{m} \sigma_i = \sum_{j=1}^{n} d_j$

x_{ij} è la QUANTITÀ TRASPORTATA da O_i a D_j

$$\begin{cases} \min \sum c_{ij} x_{ij} \\ \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = \sigma_i \quad i = 1 \dots n \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = d_j \quad j = 1 \dots m \\ x_{ij} \geq 0 \end{cases}$$

CONDIZIONE n°2 $\sum_{i=1}^{m} \sigma_i \leq \sum_{j=1}^{n} d_j$

28/09/2017

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = \sigma_i \quad i = 1 \dots n \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} \leq d_j \quad j = 1 \dots m \\ x_{ij} \geq 0 \end{cases}$$

vale anche in questo caso e le O_i si svuotano comunque

le D_j non si riempiono del tutto

CONDIZIONE n°3 $\sum_{i=1}^{m} \theta_i \geq \sum_{j=1}^{n} d_j$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \quad \theta_i \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = d_j \\ x_{ij} \geq 0 \end{cases}$$

ESERCIZIO

Esistono 3 SUPERMERCATI S_1 S_2 S_3 con S_j = supermercato

e ci sono 2 FORNITORI DI LATTE F_1 F_2 con F_i = fornitore di latte

(i) \ (j)	S_1	S_2	S_3	O (offerta dei fornitori F_i)
F_1	5€	3€	2€	100 hl
F_2	4€	5€	3€	80 hl
D	70 hl	80 hl	90 hl	

costi di approvvigionamento del latte

domanda dei supermercati S_j

⇒ non si può soddisfare la domanda dei S_j però l'offerta dei F_i è soddisfatta.

VARIABILI x_{ij} : quantità fornita di latte da F_i a S_j con $i = 1,2$ e $j = 1,2,3$

⇒ $\sum_{i=1}^{2} \theta_i < \sum_{j=1}^{3} d_j$ CONDIZIONE

FUNZIONE OBIETTIVO → 6 variabili

$$\min [\, 5x_{11} + 3x_{12} + 2x_{13} + 4x_{21} + 5x_{22} + 3x_{23} \,]$$