RICERCA OPERATIVA

La ricerca operativa è una disciplina nata dal bisogno di risolvere problemi decisionali reali in maniera ottimale gestendo le risorse disponibili che sono limitate.

Un problema di ricerca operativa si definisce attraverso vari stadi:

1) analisi del problema reale di cui si raccolgono i dati
2) costruzione del modello matematico a partire dal problema reale che viene quindi definito attraverso un linguaggio di carattere matematico. Generalmente i modelli riguardano problemi di ottimizzazione vincolata, ovvero si ricerca massimo o minimo di una funzione $f(x): \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, con $x \in K \subseteq \mathbb{R}^n$. Se si considera ad esempio il problema di trovare la via più veloce per arrivare da ingegneria alla stazione di Pisa centrale, x sarebbe il cammino, K l'insieme di strade percorribili e f ciò che permette di trovare il tempo minimo di percorrenza.
   È importante ricordare che un problema di massimo può essere sempre trasformato in uno di minimo e viceversa poiché esiste la relazione $\max f(x) = -\min[-f(x)]$.
   Servirà dunque definire K, che indica l'insieme delle decisioni ammissibili essendo l'insieme delle soluzioni di equazioni e disequazioni vincolate.
   $K := \{x \in \mathbb{R}^n : g(x) \leq 0,\ h(x) = 0\}$ dove $g(x) \leq 0$ corrisponde a $g_1(x) \leq 0$, $g_2(x) \leq 0, \dots, g_m(x) \leq 0$.
   $g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \quad g(x) = (g_1(x), g_2(x), \dots, g_m(x))$
   $h: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p \quad h(x) = (h_1(x), h_2(x), \dots, h_p(x))$
   Un problema di questo tipo è detto problema di programmazione matematica che è di tipo lineare in caso le funzioni siano lineari.
3) si cerca un algoritmo definitivo, ovvero una sequenza di istruzioni in modo univocamente definito che portano alla soluzione in un numero finito di passi
4) analisi dei risultati ottenuti, osservando se il risultato è efficiente rispetto

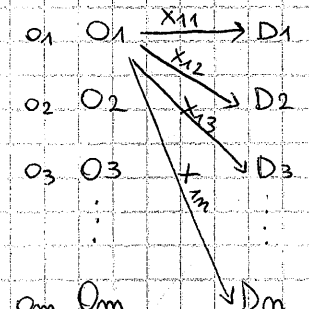
master COPY COPISTERIA

al problema. Se così non fosse si adegua il modello matematico per ottenere un risultato migliore.

Esempio: problema di programmazione dei trasporti

Si suppone di avere m cisterne in cui è disponibile della benzina che deve essere portata in n distributori aventi quantità $d_1 \dots d_n$.

Sia c_{ij} il costo unitario di trasporto da O_i a D_j con $i = 1, \dots, m$ e $j = 1, \dots, n$. L'obiettivo è trasportare il carburante (possibilmente tutto) dalle origini alle destinazioni spendendo il meno possibile.



Si definisca x_{ij} la quantità di materiale da trasportare da O_i a D_j.

Si fa l'ipotesi iniziale che $\sum_{i=1}^{m} O_i = \sum_{j=1}^{n} D_j$, cioè che il materiale presente nelle origini sia uguale alla capacità delle destinazioni in modo che tutto il materiale possa essere trasferito.

Il problema sta dunque nel minimizzare $c_{ij} x_{ij}$, ovvero $\min \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$

Come vincolo si può imporre che la quantità di merci che parte da ogni origine sia uguale a quello distribuito in tutti i depositi.

$$\underbrace{\sum_{j=1}^{n} x_{1j} = O_1, \sum_{j=1}^{n} x_{2j} = O_2, \dots, \sum_{j=1}^{n} x_{mj} = O_m}$$

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} = O_i \quad \text{con } i = 1, \dots, m$$

Di conseguenza, poichè le origini si svuotano, le destinazioni si riempiono.

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{m} x_{i1} = d_1, \dots, \sum_{i=1}^{m} x_{in} = d_n}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = d_j \quad \text{con } j = 1, \dots, n.$$

Inoltre la quantità trasportata deve essere sempre positiva, per cui:

$$x_{ij} \geq 0 \quad \text{con } i = 1, \dots, m \; ; \; j = 1, \dots n$$

Se invece non fosse vera l'uguaglianza iniziale $\sum_{i=1}^{m} O_i = \sum_{j=1}^{n} d_j$, potremmo avere altre 2 situazioni:

$$\sum_{i=1}^{m} o_i < \sum_{j=1}^{n} d_j$$

da cui otteniamo i vincoli:

$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = o_i$ con $i = 1, \dots, m$

$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \leq d_j$ con $j = 1, \dots, n$

$x_{ij} \geq 0$ con $i = 1, \dots, m$; $j = 1, \dots, n$

questo rappresenterebbe il caso in cui le origini possiedono meno capacità di quella richiesta dalle destinazioni.

$$\sum_{i=1}^{m} o_i > \sum_{j=1}^{n} d_j$$

da cui otteniamo i vincoli:

$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leq o_i$ con $i = 1, \dots, n$

$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = d_j$ con $j = 1, \dots, n$

$x_{ij} \geq 0$ con $i = 1, \dots m$; $j = 1, \dots, n$

questo rappresenterebbe il caso in cui le origini possiedono più capacità di quella richiesta dalle destinazioni.

⚠ Nei vincoli si usa sempre $\leq$ perchè si lavora sugli insiemi chiusi e di conseguenza si considerano anche i "bordi"

Esercizio: problema dei supermercati

Ci sono 3 supermercati (S_1, S_2, S_3), i quali devono rifornirsi da 2 fornitori di latte (F_1, F_2), secondo la seguente tabella.

	S_1	S_2	S_3	O
F_1	5€	3€	2€	100 hl
F_2	4€	5€	3€	80 hl
D	70 hl	80 hl	90 hl	

O = offerta fornitori

D = domanda supermercati

5€, 3€, .. = costi approvvigionamento

I fornitori sono allora in grado di esaurire la loro offerta, ma i supermercati non sono in grado di soddisfare tutta la domanda.

La variabile x_{ij} rappresenterà la quantità di latte fornita da F_i a S_j, con $i = 1, 2$ e $j = 1, 2, 3$.

L'obiettivo sarà allora trovare:

$$\min [5x_{11} + 3x_{12} + 2x_{13} + 4x_{21} + 5x_{22} + 3x_{23}]$$

e poichè ci si trova in una situazione per cui:

$\sum_{i=1}^{2} o_i < \sum_{j=1}^{3} d_j$ $\quad \sum_{j=1}^{3} x_{ij} = o_i$ con $i = 1, 2$ $\quad \sum_{i=1}^{2} x_{ij} \leq d_j$ con $j = 1, 2, 3$

I vincoli saranno allora:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} = 100 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} = 80 \\ x_{11} + x_{21} \leq 70 \\ x_{12} + x_{22} \leq 80 \\ x_{13} + x_{23} \leq 90 \\ x_{ij} \geq 0 \quad i = 1,2 \text{ e } j = 1,2,3 \end{cases}$$

Il modello viene creato, utilizzando grandezze lineari, come approssimazione del problema reale.

Esempio: problema di produzione

Si vogliono produrre n tipi di oggetti A_j il cui profitto unitario derivato dalla vendita sia c_j con $j = 1, \dots, n$. Per produrre gli oggetti abbiamo a disposizione $B_1, \dots, B_m$ risorse, nelle quantità $b_1, \dots, b_m$.

a_{ij} è la quantità di risorse B_i necessario per produrre un oggetto A_j, con $i = 1, \dots, m$ e $j = 1, \dots, n$.

Quindi è necessario conoscere quanto e quali oggetti produrre per massimizzare il profitto.

Se identifichiamo con x_j la quantità di oggetti A_j da produrre con $j = 1, \dots, n$, allora la funzione obiettivo sarà $\max \sum_{j=1}^{n} c_j \cdot x_j$

I vincoli dipenderanno allora dall'uso delle risorse.

La quantità per produrre una certa quantità di x_j, sarà $a_{ij} x_j$

Poichè tutto quello che devo produrre proviene dalle risorse, dovrò utilizzare tutte le risorse disponibili, da cui il vincolo $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i$ con $i = 1, \dots, m$

E ovviamente dovrà essere $x_j \geq 0$ con $j = 1, \dots, n$.

Il modello di progettazione è allora il seguente:

$$\begin{cases} \max \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \quad \text{con } i = 1, \dots, m \\ x_j \geq 0 \quad \text{con } j = 1, \dots, n \end{cases}$$

Problema di programmazione lineare (PL) in forma standard.

Un problema di programmazione lineare in forma standard sarà un problema di massimo. Se il problema fosse di minimo sarebbe necessario trasformarlo in un problema di massimo, ricordando che $\max f(x) = -\min[-f(x)]$.

Se invece come vincolo avessimo un vincolo di uguaglianza, questo dovrebbe essere riscritto come una coppia di disuguaglianze:

$$h_i(x) = 0 \sim h_i(x) \geq 0 \sim -h_i(x) \leq 0$$

$$h_i(x) \leq 0$$

Si dovrebbe allora scrivere come modello per il problema precedente:

$$\begin{cases} \max \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\ a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \leq b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \leq b_m \end{cases}$$

Il sistema così scritto può anche essere riscritto in forma compatta.

Si considerano c e x tali che:

$c = (c_1, \dots, c_n)^T \qquad x = (x_1, \dots, x_n)^T$

e la matrice A tale che:

$A = [a_{ij}] \quad i = 1, \dots, m \quad j = 1, \dots, n$

e il vettore b tale che $b = (b_1, \dots, b_m)$.

Il problema di programmazione lineare potrà allora essere scritto come:

$$P \begin{cases} \max (c^T x) \\ \quad \downarrow \quad \hookrightarrow \text{vettore colonna} \\ \quad \text{vettore riga} \\ Ax \leq b \end{cases}$$

P è la regione ammissibile, dove risiedono le x accettabili ed è un poliedro.

$P := \{ x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b \}$

Definizione: $P \in \mathbb{R}^n$ si dice poliedro se è intersezione di un numero finito di semispazi chiusi in $\mathbb{R}^n$ (essendo chiusi contengano anche la frontiera).

Un semispazio è l'insieme delle soluzioni di una disequazione lineare

master copy COPISTERIA 050/8312126 388/9837745