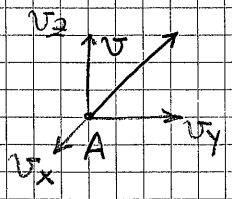
ELEMENTI COSTRUTTIVI di MACCHINE BIOMEDICHE



- Modulo

$$|\underline{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

- Versore

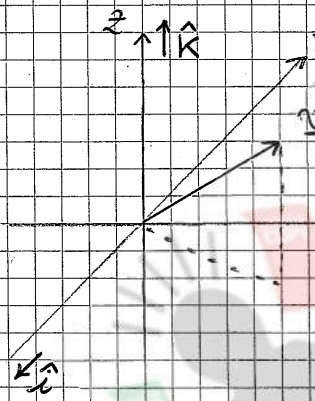
$$\hat{v} = \frac{\underline{v}}{|\underline{v}|}$$

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

- Prodotto scalare - vettore

$$\underline{v} = \underbrace{c}_{\text{costante}} \cdot \underline{u} = \begin{bmatrix} cu_x \\ cu_y \\ cu_z \end{bmatrix} \qquad |\underline{v}| = c \cdot |\underline{u}|$$

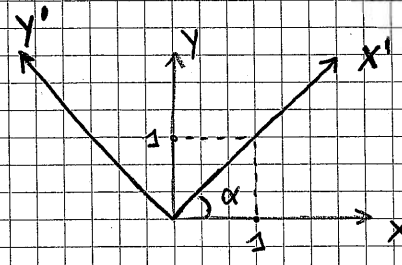
- $\underline{v}$ e $\underline{u}$ condividono gli stessi versori (//)
- il verso dipende dal segno dello scalare.



Il risultato è un vettore parallelo al primo e concorde o discorde a seconda del segno dello scalare.

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

- Matrici di rotazione → per cambiare il sistema di riferimento



$$\underline{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad |\underline{v}| = \sqrt{2}$$

$(v_z = 0)$

SR

$$SR': \begin{bmatrix} v_x' \\ v_y' \\ v_z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & (1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

↳ le componenti in z rimangono le stesse

$$= \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 + \sqrt{2}/2 + 0 \\ -\sqrt{2}/2 + \sqrt{2}/2 + 0 \\ 0 + 0 + 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = v'$$

• Prodotto scalare

P. commutativa:

$$\underline{u} \cdot \underline{v} = \underline{v} \cdot \underline{u}$$

$$a = \underline{u} \cdot \underline{v} = |u| \cdot |v| \cos\alpha$$

$$\begin{bmatrix} u_x & u_y & u_z \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} = u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z$$

Il risultato è uno scalare che può essere positivo, negativo o nullo in base al coseno dell'angolo α compreso fra i due vettori.

Se $\underline{u} \neq \underline{0}$, $\underline{v} \neq \underline{0}$ e $\underline{u} \cdot \underline{v} = \underline{0}$ ⇒ Condizione di ortogonalità

$$\alpha = \arccos\left(\frac{\underline{u} \cdot \underline{v}}{|u||v|}\right)$$

• Prodotto vettoriale

P. di circolarità:

$$\hat{i} \times \hat{j} = \hat{k}, \quad \hat{j} \times \hat{k} = \hat{i}, \quad \hat{k} \times \hat{i} = \hat{j}$$

$$\underline{w} = \underline{u} \wedge \underline{v} = \underline{u} \times \underline{v}$$

$$|w| = |u| \cdot |v| \cdot \sin\alpha$$

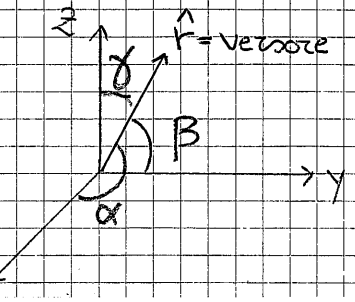
Il risultato è un vettore con:

- Modulo = prodotto fra i due vettori e il seno dell'angolo minore fra essi compreso.
- Direzione = $\perp \underline{u}$; $\perp \underline{v}$.
- Verso = concorde col pollice della mano dx, puntando l'indice verso $\underline{u}$ e il medio verso $\underline{v}$.

$$\underline{w} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} = (u_y v_z - u_z v_y)\hat{i} + (u_z \cdot v_x - v_z \cdot u_x)\hat{j} + (u_x v_y - v_x u_y)\hat{k}$$

Se $\underline{u} \neq \underline{0}$, $\underline{v} \neq \underline{0}$ e $\underline{u} \wedge \underline{v} = \underline{0}$ ⇒ Condizione di parallelismo

• Coseni direttori



$$\hat{r} = \begin{bmatrix} \cos\alpha \\ \cos\beta \\ \cos\gamma \end{bmatrix} \rightarrow \text{componente del versore lungo } x$$

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

Master CORI Corsi e... 3881933745 0331931214

• Prodotto misto

È un'operazione fra 3 vettori in cui si moltiplica scalarmente il risultato di un prodotto vettoriale, ottenendo uno scalare.

$$a = \underline{u} \cdot \underline{v} \wedge \underline{w} \qquad a = \text{Det} \begin{vmatrix} u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{vmatrix}$$

Uguaglianze:

$$\underline{u} \cdot \underline{v} \wedge \underline{w} = \underline{v} \cdot \underline{w} \wedge \underline{u} = \underline{w} \cdot \underline{u} \wedge \underline{v} = \underline{u} \wedge \underline{v} \cdot \underline{w}$$

- Se $\underline{u} \cdot \underline{v} \wedge \underline{w} = \underline{0} \Rightarrow$ Cond. di complanarità

• Doppio prodotto vettoriale

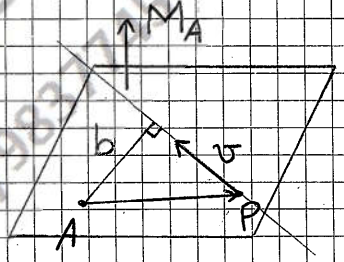
$$\underline{u} \wedge (\underline{v} \wedge \underline{w}) = (\underline{u} \cdot \underline{w}) \cdot \underline{v} - (\underline{u} \cdot \underline{v}) \cdot \underline{w}$$

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

• Momento polare (Vettore)

Il momento polare di un vettore $\underline{v}$ applicato nel punto P, rispetto al polo A, è: $M_A = \overrightarrow{AP} \wedge \underline{v}$

Il momento è un vettore libero (non applicato) $\perp$ sia a $\underline{v}$ che alla congiungente il polo e il punto di applicazione.



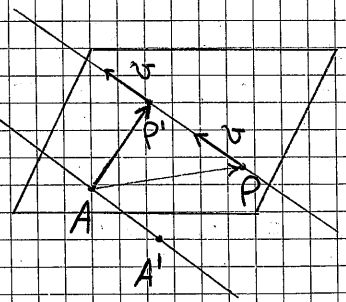
$|M_A| = b \cdot |\underline{v}|$

$M_A = 0$, quando il polo giace sulla retta del vettore applicato ($\overrightarrow{AP} \parallel \underline{v}$).

($\odot$) senso antiorario
($\otimes$) senso orario

• Legge del trasporto del momento

Il momento non varia se $\underline{v}$ fosse applicato in un altro punto P' della sua retta d'azione



$$M_A = \overrightarrow{AP'} \wedge \underline{v} = (\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{PP'}) \wedge \underline{v}$$
$$= \overrightarrow{AP} \wedge \underline{v} + \overrightarrow{PP'} \wedge \underline{v} = \overrightarrow{AP} \wedge \underline{v}$$

Similmente il risultato non cambia se si sposta il polo A in A' giacente sulla retta per A, $\parallel$ a $\underline{v}$.

Conoscendo il Momento rispetto ad un polo A, il momento rispetto ad un altro polo B è dato:

$$M_B = \overrightarrow{BP} \wedge \underline{v} = (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AP}) \wedge \underline{v} = \overrightarrow{BA} \wedge \underline{v} + \overrightarrow{AP} \wedge \underline{v} = \overrightarrow{BA} \wedge \underline{v} + M_A$$

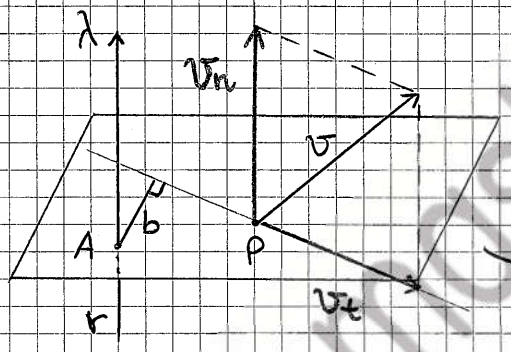
- **Momento assiale** (Scalare)

È il momento di un vettore $\underline{v}$, applicato in P, rispetto ad un asse orientato r individuato da un suo punto A e dal versore λ, definito come lo scalare:

$$M_r = (\overrightarrow{AP} \wedge \underline{v}) \cdot \hat{\lambda} \qquad \begin{cases} A \in r \\ \hat{\lambda} \text{ versore che orienta } r \end{cases}$$

- si ottiene calcolando prima il momento polare rispetto ad un punto dell'asse e poi si prende la componente del vettore ottenuto lungo la direzione del versore dell'asse. ↳ Momento polare

$M_r = 0 \rightarrow$ quando r e $\underline{v}$ sono complanari



Il momento assiale è indipendente dal punto A scelto sull'asse.

→ Può essere conveniente scomporre $\underline{v}$ (∥) nelle sue componenti normale e (⊥ a r) tangenziale; considerare solo la seconda determinandone il braccio.

- **Sistemi di vettori**

$$\underline{R} = \sum_{i=1}^{n} \underline{v}_i$$

R (risultante del sistema) è il vettore somma di tutti i vettori del sistema $\underline{v}_i$, applicati in P_i.

$$M_\Omega = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{\Omega P_i} \wedge \underline{v}_i$$

Momento risultante rispetto ad un polo Ω è la somma dei momenti dei vettori del sistema rispetto allo stesso polo.

$$M_{\Omega'} = M_\Omega + \overrightarrow{\Omega'\Omega} \wedge \underline{R} \quad \Rightarrow \text{Trasporto del Momento di un sistema di vettori}$$

Dim:

$$M_{\Omega'} = \sum_i \overrightarrow{\Omega' P_i} \wedge \underline{v}_i = \sum_i (\overrightarrow{\Omega'\Omega} + \overrightarrow{\Omega P_i}) \wedge \underline{v}_i = \underbrace{\sum_i \overrightarrow{\Omega'\Omega} \wedge \underline{v}_i}_{= \overrightarrow{\Omega'\Omega} \wedge \left(\sum_i \underline{v}_i\right)_{\underline{R}}} + \dots$$

$$\dots \underbrace{\sum_i (\overrightarrow{\Omega P_i} \wedge \underline{v}_i)}_{M_\Omega}$$

Da cui: $M_{\Omega'} = M_\Omega + \overrightarrow{\Omega'\Omega} \wedge \underline{R}$

- **Trinomio invariante**

$$\tau = \underline{R} \cdot M_A$$

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

(Invariante = indipendente dal polo scelto)

Sistemi a $\tau = \emptyset$ sono:

1. Sistemi PIANI: i vettori giacciono tutti nello stesso piano e quindi il momento risultante rispetto ad un polo è al piano è $\perp$ al piano stesso.
2. Sistemi di VETTORI PARALLELI: i vettori sono // sia nel piano che nello spazio.

- **Sistemi equivalenti**

Due sistemi di vettori si dicono equivalenti se hanno stessa risultante e stesso momento risultante.
Per risolvere problemi complessi è opportuno scegliere il più semplice sistema equivalente:

a) SISTEMI A RISULTANTE NULLA ($\underline{R} = 0$)
Il sistema equivalente più semplice è una coppia* di momento pari al momento risultante rispetto ad un polo qualsiasi.

* Due vettori, l'uno opposto all'altro, formano una coppia che ha $\underline{R} = 0$ e momento indipendente dal polo.

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

b) SISTEMI A RISULTANTE NON NULLA ($\underline{R} \neq 0$):

- $\underline{\tau = 0}$
Il sistema equivalente è un vettore pari a R applicato in un punto qualsiasi dell'ASSE CENTRALE.

- $\underline{\tau \neq 0}$
Il sistema equivalente è R applicata nell'asse centrale e ad una coppia di momento pari a quello risultante.