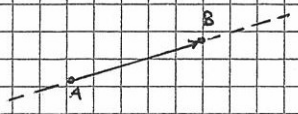
INTRODUZIONE MECCANICA APPLICATA: 26/09

RIPASSO SU VETTORI E OPERAZIONI VETTORIALI:



NOTAZIONE DI VETTORE: $\underline{v}, \vec{v}, \mathbf{v}$ MODULO: $|\underline{v}|$

IL VETTORE PUÒ ESSERE ESPRESSO COME $\overline{AB}$ OVVERO UN SEGMENTO ORIENTATO CON VERSO DA A A B OPPURE COME UN VETTORE APPLICATO DI CUI UN ESEMPIO È LA FORZA F (PER QUESTA TIPOLOGIA È IMPORTANTE SPECIFICARE IL PUNTO DI APPLICAZIONE)

$(P, \underline{F})$ VETTORE $\underline{F}$ APPLICATO IN P

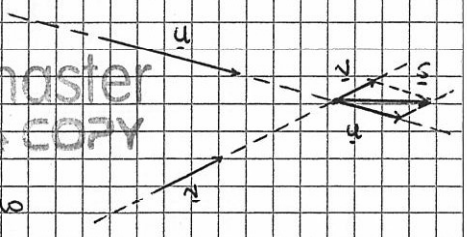
IN FINE L'ULTIMA TIPOLOGIA È QUELLA DI VETTORE LIBERO, CHE PUÒ ESSERE SPOSTATO

OPERAZIONI VETTORIALI:

1) SOMMA: $\underline{u} + \underline{v} = \underline{s}$ · REGOLA DEL PARALLELOGRAMMA

REGOLA TESTA-CODA:

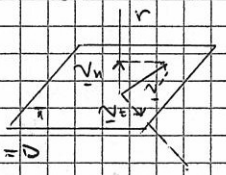
(LA SOMMA È UNA COMPOSIZIONE)



2) DECOMPOSIZIONE: SE VOGLIO SCOMPORRE $\underline{s}$ LUNGO r, t TRASLO QUESTI LUNGO LA CODA DI $\underline{s}$ E PROIETTO $\underline{s}$

3) DECOMPOSIZIONE IN r E IN UN PIANO $\perp$ r: AVRÒ IN QUESTO CASO DUE COMPONENTI DEL VETTORE $\underline{v}$: $\underline{v}_n$ COMPONENTE NORMALE

$\underline{v}_t$ COMPONENTE TANGENZIALE



4) DIFFERENZA TRA VETTORI: È UNA SOMMA CON UN VETTORE OPPOSTO $\Rightarrow$

$-\underline{v}$ HA MODULO E DIREZIONE = $\underline{v}$ MA VERSO OPPOSTO

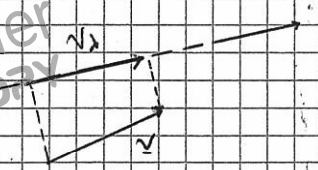
5) PRODOTTO TRA UNO SCALARE E UN VETTORE: $\underline{p} = c\underline{v}$ HA DIREZIONE UGUALE A $\underline{v}$ VERSO UGUALE SE $c > 0$, OPPOSTO SE $c < 0$ E MODULO = A c VOLTE $\underline{v}$

IL VERSORE È UN VETTORE A MODULO UNITARIO $|\lambda| = 1$ UTILE PER LE DIREZIONI E I VERSI

6) PRODOTTO SCALARE TRA VETTORI: È UNA QUANTITÀ SCALARE $\underline{u} \cdot \underline{v}$ È UN PRODOTTO PER COMPONENTI $|\underline{u}||\underline{v}| \cos\alpha$, PUÒ ESSERE VISTO ANCHE COME PROIEZIONE DI UN VETTORE SULL'ALTRO, È COMMUTATIVO

ANALOGO VALE CON IL PRODOTTO TRA VETTORE E VERSORE $\underline{v}_\lambda$

$\underline{v}_\lambda = \underline{v} \cdot \underline{\lambda}$



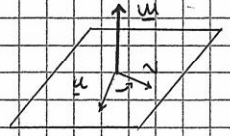
7) PRODOTTO VETTORIALE: IL RISULTATO È UN VETTORE SE SONO $\parallel$ = $\underline{0}$ ZERO VETTORIALE

$\underline{w} = \underline{u} \wedge \underline{v}$ CON: a) MODULO: $|\underline{w}| = |\underline{v}||\underline{u}| \sin\alpha$ ANTICOMMUTATIVO

b) DIREZIONE E VERSO DATI DALLA REGOLA DELLA MANO DESTRA

$\underline{w} \perp \underline{u}, \perp \underline{v}$ ESCE DAL PIANO SU CUI GIACIONO $\underline{v}, \underline{u}$

↳ IL PALMO SI CHIUDE DAL VETTORE ① AL VETTORE ② E IL POLLICE DÀ IL VERSO DI ③

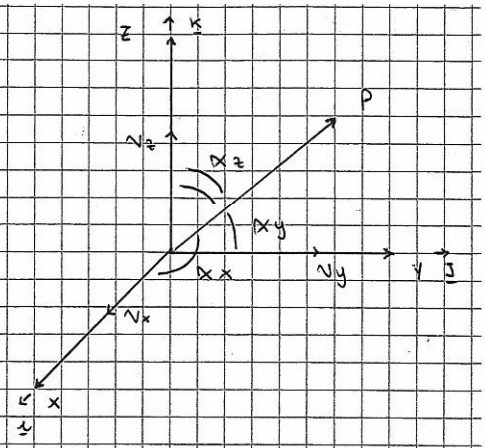


8) PRODOTTO MISTO: $q = \underline{u} \cdot \underline{v} \wedge \underline{w} = \underline{w} \cdot \underline{u} \wedge \underline{v} = \underline{u} \wedge \underline{v} \cdot \underline{w}$

9) DOPPIO PRODOTTO VETTORE: $\underline{b} = \underline{u} \wedge \underline{v} \wedge \underline{w} = (\underline{u} \cdot \underline{w})\underline{v} - (\underline{v} \cdot \underline{w})\underline{u}$

10) COMPONENTI CARTESIANE:

TERNA: $\{O, x, y, z\}$, $\underline{i}, \underline{J}, \underline{K}$ VERSORI DELLA TERNA LEVOGIRA



$$\underline{V} = V_x \underline{i} + V_y \underline{J} + V_z \underline{K} = \underline{V}_x + \underline{V}_y + \underline{V}_z$$

$$\begin{cases} V_x = \underline{V} \cdot \underline{i} \\ V_y = \underline{V} \cdot \underline{J} \\ V_z = \underline{V} \cdot \underline{K} \end{cases}$$ PROIEZIONE DI $\underline{V}$ LUNGO I VERSORI

$$[\underline{V}] = \begin{bmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{bmatrix} = (V_x, V_y, V_z)$$ UNA VOLTA DEFINITE LE COMPONENTI, $\underline{V}$ È DEFINITO

$$|\underline{V}| = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}$$

I COSENI DIRETTORI: $\underline{\lambda} = \lambda_x \underline{i} + \lambda_y \underline{J} + \lambda_z \underline{K}$ CON: $\begin{cases} \lambda_x = \underline{\lambda} \cdot \underline{i} = \cos \alpha_x \\ \lambda_y = \cos \alpha_y \\ \lambda_z = \cos \alpha_z \end{cases}$ $|\lambda_x| = 1$

E VALE $\lambda_x^2 + \lambda_y^2 + \lambda_z^2 = 1$

⊕ $\underline{V} + \underline{U}$ È SOMMA DI COMPONENTI

⊙ $\underline{U} \cdot \underline{S}$ = SOMMA DEI PRODOTTI DI COMPONENTI

⊗ $\underline{U} \times \underline{V} = \det \begin{bmatrix} i & J & K \\ u_x & u_y & u_z \\ V_x & V_y & V_z \end{bmatrix}$ → TERNA; → VETTORE N°① ; → VETTORE N°② — METODO SARRUS

- $\dfrac{d}{dt} V(t) = \dfrac{dV(x)}{dt} \underline{i} + \dfrac{dV(y)}{dt} \underline{J} + \dfrac{dV_z}{dt} \underline{K}$
- $\dfrac{d}{dt}(\beta(t) \cdot V(t)) = V(t) \dfrac{d}{dt}\beta(t) + \beta(t) \cdot \dfrac{d}{dt} V(t)$ ANALOGO PER GLI INTEGRALI
- $\dfrac{d}{dt}(\underline{U}(t) \cdot \underline{V}(t)) = \underline{U}(t) \cdot \dfrac{d}{dt}\underline{V}(t) + \underline{V}(t) \cdot \dfrac{d}{dt}\underline{U}(t)$
- $\dfrac{d}{dt}(\underline{U}(t) \wedge \underline{V}(t)) = \dfrac{d}{dt}\underline{U}(t) \wedge \underline{V}(t) + \underline{U}(t) \wedge \dfrac{d}{dt}\underline{V}(t)$

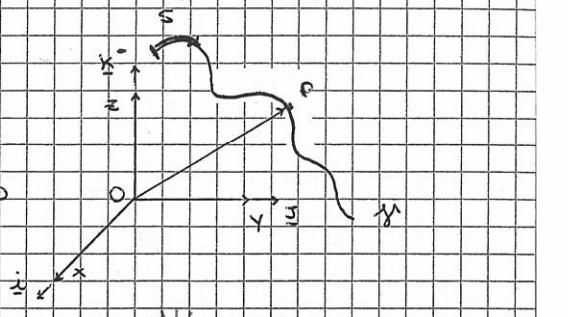
master copy

CINEMATICA:

LA CINEMATICA STUDIA IL MOTO DI UN PUNTO P

⇒ HO BISOGNO DI UN SISTEMA DI RIFERIMENTO

(OSSERVO COME VARIA OP NEL TEMPO)



POSIZIONE P ⟶ VETTORE POSIZIONE $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP}(t) = P - O$

- $\underline{v}_P = \frac{d}{dt}\overrightarrow{OP}(t) \Rightarrow OP(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix} \Rightarrow \frac{d}{dt} OP(t) = \begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ \dot{z}(t) \end{bmatrix}$
- $\underline{a}_P = \frac{d^2}{dt^2} OP(t) = \begin{bmatrix} \ddot{x}(t) \\ \ddot{y}(t) \\ \ddot{z}(t) \end{bmatrix}$

master copy

SE CONOSCIAMO γ TRAIETTORIA POSSO SCRIVERE $\underline{v}_P$, $\underline{a}_P$ IN MANIERA INTRINSECA

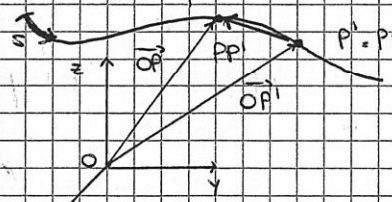
INTRODUCO $\overrightarrow{S}$ ASCISSA CURVILINEA $S(t) = s$

⇒ POSSO COLLEGARE $\overrightarrow{OP}(t) - \overrightarrow{OP}(s)$ (VARIABILE TEMPO E SPAZIO, $OP(s) = \begin{bmatrix} x(s) \\ y(s) \\ z(s) \end{bmatrix}$

DEVO TROVARE ORA $\underline{v}_P$, $\underline{a}_P$ CON QUESTA VARIABILE

$\underline{v}_P = v_P(s) = \frac{d}{dt} OP(s) = \frac{ds}{dt} \cdot \frac{d\,OP(s)}{ds} = \dot{s}\,\underline{\tau}$? IL TERMINE VICINO A $\dot{s}$ LO TROVO

TRATTANDO $\frac{d}{ds}\overrightarrow{OP}(s) = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\overrightarrow{OP}(s+\Delta s) - \overrightarrow{OP}(s)}{\Delta s}$



⇒ $\lim_{\Delta s \to 0} \frac{\overrightarrow{OP'} - \overrightarrow{OP}}{\Delta s}$ MA $\overrightarrow{OP'} - \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{PP'}(s) \Rightarrow \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\overrightarrow{PP'}}{\Delta s} = \underline{\tau}$

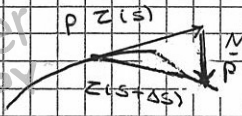
CON $\underline{\tau}$ VERSORE TANGENTE IN P DI γ

DEVO ORA OSSERVARE IL MODULO: $\lim_{\Delta s \to 0} \frac{|PP'|}{\Delta s} = \lim \frac{\text{lung. arc}}{\text{lung. cord}} \sim 1$

⇒ OTTENGO: $\frac{d}{ds}\overrightarrow{OP}(s) = \underline{\tau} \Rightarrow \boxed{\underline{v}_P(s) = \dot{s}\,\underline{\tau}}$ IN OGNI PUNTO LA VELOCITÀ È TANGENTE ALLA TRAIETTORIA

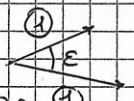
$\underline{a}_P$: $a_P(s) = \frac{d}{ds} OP(s) = \frac{d}{dt} v_P(s) = \frac{d}{dt}(s\,\underline{\tau}) \Rightarrow \ddot{s}\,\underline{\tau} + s\frac{d\underline{\tau}}{dt} = \ddot{s}\,\underline{\tau} + \dot{s}\frac{d\underline{\tau}}{ds}\frac{ds}{dt} = \ddot{s}\,\underline{\tau} + \dot{s}^2\frac{d\underline{\tau}}{ds}$

DEVO CARATTERIZZARE $\frac{d\underline{\tau}}{ds} = \frac{d^2\overrightarrow{OP}}{ds^2} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\underline{\tau}(s+\Delta s) - \underline{\tau}(s)}{\Delta s} = \overrightarrow{\kappa}$



LA DERIVATA DEL VERSORE È ⊥ AL VERSORE STESSO ($\underline{n} \perp \underline{\tau}$)

1) $\underline{\tau}$ È UN VERSORE ⇒ $\frac{d\underline{\tau}}{ds} \equiv \underline{\kappa} \perp \underline{\tau}$, $\underline{n} = \frac{d\underline{\tau}/ds}{|d\underline{\tau}/ds|}$ NORMALIZZATA



2) MODULO: CONSIDERO IL TRIANGOLO IN FIGURA ⇒ ε = ANGOLO DI CONTINGENZA (H)

$\lim_{\Delta s \to 0} \left| \frac{\underline{\tau}(s+\Delta s) - \underline{\tau}(s)}{\Delta s} \right| = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{2\sin \varepsilon/2}{\Delta s} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\sin \varepsilon/2}{\varepsilon/2} \cdot \frac{\varepsilon/2}{\Delta s} = 1 \cdot \lim \frac{\varepsilon}{\Delta s}$

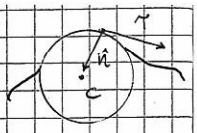
E CHIAMO $\lim_{\Delta s \to 0} \frac{\varepsilon}{\Delta s} = c$ CURVATURA DI γ CI DICE QUANTO CURVA LA TRAIETTORIA

L'INVERSO DELLA CURVATURA $\frac{1}{c} = \rho$ RAGGIO DI CURVATURA (⇒ APPROSSIMO LA TRAIETTORIA IN C AD UNA CIRCONFERENZA)

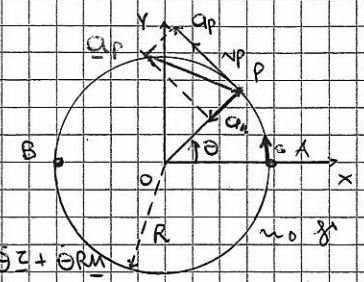
⇒ $\frac{d\underline{\tau}}{ds} = \left[\frac{d\underline{\tau}}{ds}\right] \underline{n} = c\,\underline{n} = \frac{\underline{n}}{\rho} \Rightarrow \boxed{\underline{a}_P = \ddot{s}\,\underline{\tau} + \dot{s}^2 \frac{\underline{n}}{\rho}}$

DUNQUE:

$\underline{a}_P = \ddot{s}\,\underline{\tau} + \dot{s}^2 \frac{\underline{n}}{\rho}$ DOVE $\begin{cases} \ddot{s}\,\underline{\tau} = \underline{a}_P^{\tau} \text{ COMPONENTE TANGENZIALE} = \Delta \text{ MODO} \\ \dot{s}^2 \frac{\underline{n}}{\rho} = \underline{a}_n^{\tau} \text{ COMPONENTE NORMALE} = \Delta \text{ DIREZIONE} \end{cases}$



APPROSSIMO LA CURVA A UNA CIRCONFERENZA CERCHIO OSCULATORE



- MOTO CIRCOLARE:

$\overrightarrow{OP}(t) = \overrightarrow{OP}(s)$ ESPRIMO (s) IN FUNZIONE DI Θ

$$\begin{cases} s = \Theta R \\ \dot{s} = \dot{\Theta} R \\ \ddot{s} = R\ddot{\Theta} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \underline{v}_P = \dot{s}\,\underline{\tau} = R\dot{\Theta}\,\underline{\tau} \\ \underline{a}_P = \ddot{s}\,\underline{\tau} + \dot{s}^2 \frac{\underline{n}}{\rho} = R\ddot{\Theta}\,\underline{\tau} + \frac{(\dot{\Theta}R)^2}{R}\underline{n} = R\ddot{\Theta}\underline{\tau} + \dot{\Theta}R\underline{n} \end{cases}$$

IN GENERE HO: $\begin{cases} \omega = \dot{\Theta} \text{ VALORE VELOCITÀ ANGOLARE} \\ \ddot{\omega} = \ddot{\Theta} \text{ VALORE ACCELERAZIONE ANGOLARE} \end{cases}$

IN COORDINATE: $\begin{cases} x_P(t) = r\cos(\Theta(t)) \\ y_P(t) = r\sin(\Theta(t)) \end{cases}$

⟶ MOTO CIRCOLARE UNIFORME $\dot{\Theta} = \text{COST} = \dot{s}\ \forall t \Rightarrow \ddot{\Theta} = 0$, MOTO PERIODICO $T = \frac{2\pi}{\omega}$

EQUAZIONI DEL MOTO CIRCOLARE UNIFORME: $\begin{cases} x_P(t) = r\cos(\omega t + \Theta_0) \\ y_P(t) = r\sin(\omega t + \Theta_0) \end{cases}$

- MOTO ARMONICO: CONSIDERO $Q = x_P(t)$ CIÒ CHE OTTENGO DALLA PROIEZIONE È IL MOTO ARMONICO, È UN MOTO TRA A E B

$x_Q(t) = r\cos(\omega t + \Theta_0)$, $\dot{x}(t) = v_P$, $\ddot{x}(t) = a_P$

$$\begin{aligned} v_P &= -r\omega\sin(\omega t + \Theta_0) \\ a_P &= -r\omega^2\cos(\omega t + \Theta_0) \end{aligned}$$

ALLA BASE DELLE VIBRAZIONI NELLA DINAMICA

master COPY

CINEMATICA DEL CORPO RIGIDO:

IN GENERALE UN CORPO RIGIDO È UN CORPO IN CUI LE DEFORMAZIONI SONO TRASCURABILI

- VINCOLO DI RIGIDITÀ: • QUANDO DUE PUNTI DEL CORPO HANNO DISTANZA COSTANTE
  • QUANDO L'ANGOLO TRA DUE SEGMENTI È COSTANTE

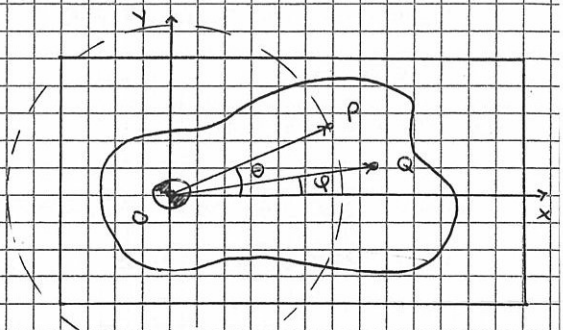
- MOTO ROTATORIO:

L'IDEA È QUELLA DI OSSERVARE IL MOTO DI P

OSSERVO CHE LA TRAIETTORIA È AL PIANO E QUESTA È UNA CIRCONFERENZA

$\vec{OP}(t) \Rightarrow \vec{\theta}(t) = \vec{OP}(\theta)$

NEL CASO IN CUI CONSIDERASSI Q LA TRAIETTORIA NON VARIA, VARIA SOLO IL RAGGIO $\Rightarrow$ LA "GRANDEZZA"



NOTA: ⊕ CERNIERA FISSA

$\underline{v}_P = r_P \dot{\theta} \underline{\tau}, \quad \underline{a}_P = r_P \ddot{\theta} \underline{\tau}_P + r_P \dot{\theta}^2 \underline{n}_P$

$\underline{v}_Q = r_Q \dot{\varphi} \underline{\tau}, \quad \underline{a}_Q = r_Q \ddot{\varphi} \underline{\tau}_\varphi + r_Q \dot{\varphi}^2 \underline{n}_Q$

} QUALE LEGAME C'È?

VALE DAL VINCOLO DI RIGIDITÀ: $\varphi - \theta = cte \Rightarrow P\hat{O}Q = cte \Rightarrow$ DERIVO RISPETTO A t:

$\frac{d}{dt}(\theta - \varphi) = \dot{\theta} - \dot{\varphi} = 0 \Rightarrow \boxed{\dot{\theta} = \dot{\varphi} = \omega} \Rightarrow$ DERIVANDO ANCORA $\boxed{\ddot{\theta} = \ddot{\varphi} = \dot{\omega}}$

DA QUESTO CAPISCO CHE VELOCITÀ E ACCELERAZIONE SONO UNA PROPRIETÀ DEL CORPO RIGIDO (NON DEL PUNTO)

$\begin{cases} \dot{\theta} = \dot{\varphi} = \omega \\ \ddot{\theta} = \ddot{\varphi} = \dot{\omega} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \underline{\omega} = \omega \underline{k} \\ \underline{\dot{\omega}} = \dot{\omega} \underline{k} \end{cases}$ VETTORI, $\underline{k} \perp$ E USCENTE DAL PIANO

$\underline{v}_P$ È DIRETTO LUNGO $\underline{\tau}$, $\perp \vec{OP}$, ORTOGONALE $\omega, k \Rightarrow$

$\boxed{\underline{v}_P = \underline{\omega} \wedge \vec{OP}}$ I RELAZIONE IMPORTANTE

$\boxed{\underline{a}_P = \underline{\dot{\omega}} \wedge \vec{OP} - \omega^2 \vec{OP}}$ II RELAZIONE IMPORTANTE

TG NORM

- MOTO SFERICO: È UN MOTO ATTORNO A UN PUNTO FISSO

SE CONSIDERO IL MOTO DI UN PUNTO LA TRAIETTORIA È UNA SUPERFICIE SFERICA

$\forall$ $\underline{\omega}, \underline{\dot{\omega}}$ NON SONO LUNGO k MA SONO VETTORI QUALUNQUE

$\boxed{\underline{v}_P = \underline{\omega} \wedge \vec{OP}}$ $\quad \boxed{\underline{a}_P = \underline{\dot{\omega}} \wedge \vec{OP} + \underline{\omega} \wedge (\underline{\omega} \wedge \vec{OP})}$

E IL MOTO PIANO È UN CASO PARTICOLARE DI QUESTO

master COPY