I SISTEMI LINEARI

- Un'equazione di primo grado viene detta EQUAZIONE LINEARE

$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n = b$

$x_1, \dots, x_n$ = variabili
$a_1, \dots, a_n$ = coefficienti
b = termine noto

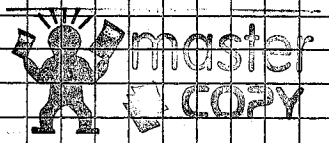
Risolvere l'equazione vuol dire trovare una lista di n numeri reali

$\begin{pmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix} \mid a_1 s_1 + a_2 s_2 + \dots + a_n s_n = b$

Es. $3x + 7y + \sqrt{2} z = -\frac{3}{2}$

$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ non è soluzione dell'equazione

$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ è soluzione dell'equazione



Se è in una sola incognita l'equazione può essere scritta nella forma generale:

$ax + b = 0$

Se $a \neq 0 \Rightarrow$ ammette un'unica soluzione $x = -\frac{b}{a}$
Se $a = 0$ e $b \neq 0 \Rightarrow S = \emptyset$
Se $a = 0 \wedge b = 0 \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow S = \mathbb{R}$

È più propriamente un'IDENTITÀ

Se invece, un'equazione lineare ha 2 variabili le soluzioni sono in genere infinite.

Es. $x + y = 1$ le soluzioni sono tutte le coppie infinite:

$(x, y) \mid x = t, \; y = 1 - t \quad \forall t \in \mathbb{R}$

- SISTEMI DI EQUAZIONI LINEARI

$$\begin{cases} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n = b_1 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2n} x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \dots + a_{mn} x_n = b_m \end{cases}$$

m equazioni lineari
n variabili
↓
Queste m equazioni lineari devono essere soddisfatte contemporaneamente

Un sistema lineare di m equazioni in n incognite può appartenere alle seguenti categorie:

- Sistema possibile: o una sola soluzione $\Rightarrow$ costituita da una lista di valori reali
  - infinite soluzioni $\Rightarrow$ Dipendenti (assumono da uno o più parametri, soluzioni che si possono determinare dando opportuni valori ai parametri.
- Sistema impossibile: non esistono soluzioni comuni alle varie equazioni.

Es. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 = 0 \\ x_1 - x_2 = -2 \end{cases}$

Questo sistema non ha soluzioni poiché contemporaneamente $x_1 - x_2$ non possono avere risultati $\neq$. $\Rightarrow S = \emptyset$

$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 = 0 \end{cases}$

Questo sistema ha 3 incognite in 2 equazioni ed ha infinite soluzioni

$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ è soluzione

$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ è soluzione

$\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$ è soluzione

Se moltiplico una soluzione per un qualunque numero reale ottengo sempre soluzioni del sistema

Def. Due sistemi lineari di m equazioni in n incognite si dicono EQUIVALENTI se hanno le stesse soluzioni cioè se ogni lista di valori che è soluzione dell'uno lo è anche dell'altro.

- MATRICI

Le matrici sono delle tabelle di numeri utilizzate come modo per risolvere sistemi lineari risparmiando spazio.

Dato un sistema lineare si possono associare 2 matrici

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

matrice incompleta del sistema
m righe (m = n° equazioni)
n colonne (n = n° variabili)

$$C = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

matrice completa del sistema
m righe
$n+1$ colonne

colonna dei termini noti

Una matrice di tipo (m,n) è una tabella di numeri (reali o complessi) organizzata in m righe e n colonne.

$M_{m,n}(\mathbb{R}) = \{$ matrici $m \times n$ a coefficienti in $\mathbb{R}\}$

Es. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ 3×3 matrice incompleta

$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ 3×4 matrice completa

master COPY

OPERAZIONI SULLE MATRICI

- **Somma di matrici (con lo stesso dimensione)**

$A, B \in M_{m,n}(\mathbb{R}) \Rightarrow$ posso fare $A+B \in M_{m,n}(\mathbb{R})$

la matrice $C = A+B$ è ottenuta se ogni elemento di C è la somma degli elementi corrispondenti di A e B (somma termine a termine)

Es. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1/2 & 3 \\ 1/2 & \sqrt{7} & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+\sqrt{2} & 3/2 & 0 \\ 1 & \sqrt{7} & -1 \end{pmatrix}$

Caso particolare: $m = n \Rightarrow M_{n,n}(\mathbb{R})$ matrici quadrate di dimensione n (stesso numero di righe e di colonne)

↓

corrispondono a sistemi di n equazioni lineari in n incognite.

- **Prodotto di una matrice per uno scalare (λ)**

Uno scalare è numero reale $\lambda \in \mathbb{R}$

$A \in M_{m,n}(\mathbb{R}) \Rightarrow$ posso fare $\lambda \cdot A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$

moltiplico tutti gli elementi della matrice A per λ

la dimensione di A è uguale alla dimensione di λA

Es. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad \lambda = \frac{2}{3}$

$\lambda A = \begin{pmatrix} 4/3 & 2/3 & -2 \\ 1/3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

oss $M_{1,1}(\mathbb{R}) = \lambda$ (è un numero reale)

- **Prodotto fra matrici**

$A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$

$B \in M_{k,t}(\mathbb{R})$ $\Rightarrow$ posso fare $A \cdot B$ solo se $n = k$

(il numero di colonne della prima matrice deve coincidere con il numero di righe della seconda)

$A \cdot B$ è una matrice avente tante righe quante sono quelle della prima matrice e tante colonne quante sono quelle della seconda

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ $\quad B = \begin{pmatrix} x & y & z \\ u & v & w \end{pmatrix}$

↓ $M_{2,2}(\mathbb{R})$ $\quad$ $M_{2,3}(\mathbb{R})$

$A \cdot B = \begin{pmatrix} ax + bu & ay + bv & az + bw \\ cx + du & cy + dv & cz + dw \end{pmatrix} \leftarrow M_{2,3}(\mathbb{R})$

Es. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ $3 \neq 2$ non si può fare il prodotto

$M_{2,3}(\mathbb{R})$ $M_{2,2}(\mathbb{R})$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot 1 + 1\cdot(-1) + (-3)\cdot 0 \\ 1/2 \cdot 1 + 0\cdot(-1) + 0\cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

$M_{2,3}(\mathbb{R})$ $M_{3,1}(\mathbb{R})$ $M_{2,1}(\mathbb{R})$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2\cdot 1 + 1(-1) - 3\cdot 0 & 2\cdot 0 + 1\cdot 2 + (-3)\cdot 0 & 2\cdot 1 + 1\cdot 1 - 3\cdot 1 & 2\cdot 0 + 1(-1) - 3(-1) \\ 1/2\cdot 1 + 0(-1) + 0\cdot 0 & 1/2\cdot 0 + 0\cdot 2 + 0\cdot 0 & 1/2\cdot 1 + 0\cdot 1 + 0\cdot 1 & 1/2\cdot 0 + 0(-1) + 0(-1) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix} \leftarrow M_{2,4}(\mathbb{R})$$

NB. Quindi il prodotto fra matrici non vale la proprietà commutativa $AB \neq BA$

[Tuttavia esistono coppie di matrici A e B tali che $AB = BA$: queste si chiamano matrici permutabili o si dice anche che commutano].

oss. Viene definita MATRICE D'IDENTITÀ una matrice diagonale in cui gli elementi della diagonale principale sono tutti 1. (matrice quadrata che ha tutti 1 sulla diagonale principale e tutti 0 altrove).

↓

Commuta con tutte le matrici quadrate dello stesso ordine ed è l'elemento neutro rispetto al prodotto fra matrici:

$$C_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{matrice d'identità di ordine 3 } (Id_3)}$$

$Id_m \cdot (A) = A$

$M_{m,m}$ $M_{m,n}$ se esiste

$$\Rightarrow C_\lambda = \lambda \cdot Id_m$$

$$C_\lambda \cdot A = A \cdot \lambda \cdot Id_m = \lambda \cdot A$$

Quindi

$A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ $\wedge$ $B \in M_{p,q}(\mathbb{R})$

Se e solo se $m = p \wedge n = p \Rightarrow A + B \in M_{m,n}(\mathbb{R})$

$A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ $\wedge$ $B \in M_{p,q}(\mathbb{R})$

Se e solo se $n = p \Rightarrow A \cdot B \in M_{m,q}(\mathbb{R})$

master COPY

Ad un sistema generico è possibile attribuire 3 matrici differenti:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m_1} & a_{m_2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in M_{m,n}(\mathbb{R}) \quad \rightarrow \text{matrice dei coefficienti}$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in M_{n,1}(\mathbb{R}) \qquad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in M_{m,1}(\mathbb{R}) \quad \text{Matrice dei termini noti}$$

Il sistema generico (*) equivale quindi ad $AX = B$

$$AX = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

$AX \in M_{m,1}(\mathbb{R})$

Es. $\begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ 3x + 7y - 5z = 2 \\ -x - y = 5 \end{cases}$ $\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 7 & -5 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 7 & -5 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$



Def. Due sistemi di equazioni lineari si dicono equivalenti se hanno lo stesso insieme soluzioni

Es. $\begin{cases} x + y = 2 \\ x - y = 0 \end{cases}$

$2x = 2$

$\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\begin{cases} 3x + 2y = 5 \\ -x - 5y = -6 \end{cases}$

$\begin{cases} 3x = 5 - 2y \Rightarrow x = \frac{1}{3}(5 - 2y) \\ -\frac{5}{3} + \frac{2}{3}y - 5y = -6 \end{cases}$

$y\left(\frac{2}{3} - 5\right) = -6 + \frac{5}{3} \Rightarrow y = 1$

$\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$ $\quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad \Rightarrow$ I due sistemi sono equivalenti

- Un tipo importante di matrici sono le MATRICI A SCALINI
  - Una matrice a scalini è una matrice quadrata o rettangolare il cui primo elemento non nullo di ogni riga è più a destra del primo elemento non nullo della riga precedente.
    - Il primo elemento non nullo di ogni riga prende il nome di PIVOT.