DINAMICA DEL VOLO 1

Prof. Mengali

Appunti Alessandro Mariottini

LEZIONE 27/9/21

SCARICARE IL MATERIALE DI VOLTA IN VOLTA

Password per i file ADV-I@WEB

TESTI:

- Mc Ruer — Aircraft dynamics and automatic control
- Stevens — Aircraft Control and Simulation
- Mengoli — Elementi di Dinamica del volo con Matlab

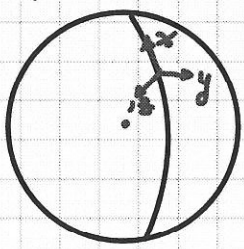
RICHIAMI

- Sistemi di riferimento

• Terna geocentrico - equatoriale
non è un sistema di riferimento inerziale ed è fisso
Da un punto di vista pratico viene considerato inerziale

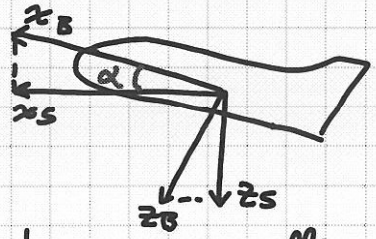
• Terna ani terrestri, ane z uguale a prima, e ruota insieme alla terra
ha una velocità angolare come la terra

• Terna verticale-locale: ha origine nel centro di massa dell'aereo, lungo il piano meridiano. Ane x punta verso nord, y verso est, z verso il centro della terra



• Terna ani corpo: ane x lungo il muso e con ane z forma il piano di simmetria dell'aereo

• Terna ani di stabilità



$y_S \equiv y_B$

• Terna ani-vento: ane x allineato con vettore velocità e l'ane z con z_S

ROTAZIONI ELEMENTARI

$$[w]_A = T_{AP}\,[w]_P \longrightarrow \begin{Bmatrix} w_x \\ w_y \\ w_z \end{Bmatrix}$$

A → arrivo, P → partenza

T_{AP} matrice di trasformazione

$$T_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\xi & \text{sen}\,\xi \\ 0 & -\text{sen}\,\xi & \cos\xi \end{bmatrix} \qquad T_y = \begin{bmatrix} \cos\xi & 0 & -\text{sen}\,\xi \\ 0 & 1 & 0 \\ \text{sen}\,\xi & 0 & \cos\xi \end{bmatrix} \qquad T_z = \begin{bmatrix} \cos\xi & \text{sen}\,\xi & 0 \\ -\text{sen}\,\xi & \cos\xi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Rotazione attorno a z:

$$\begin{cases} w_{x'} = w_x \cos\xi + w_y \,\text{sen}\,\xi \\ w_{y'} = -w_x \,\text{sen}\,\xi + w_y \cos\xi \\ w_{z'} = w_z \end{cases}$$

- Risultati simili si ottengono per gli altri assi

Sono tutte matrici ortogonali

ANGOLI AERODINAMICI

$$\begin{cases} U = V_c \cos\alpha \cos\beta \\ V = V_c \,\text{sen}\,\beta \\ W = V_c \,\text{sen}\,\alpha \cos\beta \end{cases}$$

- Angoli di traiettoria (γ) e di rotta (χ)

Se l'aria non è ferma devo tenerne conto:

$$\vec{V}_g = \vec{V}_c + \vec{V}_w$$

- L'angolo χ_c (crab angle) è l'angolo del vettore velocità rispetto all'asse corpo x_B
- ANGOLO DI ROTTA: angolo tra V_c e la direzione del nord in assenza di vento $\Rightarrow \chi = \beta + \psi$

VELOCITÀ ANGOLARI TRA LE TERNE

Ω_{VB} velocità di T_V rispetto a T_E
Ω_{BV} velocità di T_B rispetto a T_V

$\Omega_V = \Omega_E + \Omega_{VE}$
$\Omega_B = \Omega_V + \Omega_{BV}$

sostituisco la prima nella seconda

Si possono trascurare Ω_E e Ω_{VE} in quanto di ordine di grandezza minori rispetto agli altri

Ciò equivale ad assumere un modello di terra piatta

Questo modello non è valido per studiare problemi con tempi di simulazione lunghi

RELAZIONI CINEMATICHE

$$T_\Omega = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -s\phi \\ 0 & c\phi & c\theta s\phi \\ 0 & -s\phi & c\theta c\phi \end{bmatrix}$$

P, Q, R componenti di Ω_{BV} nella terna T_B

master COPY COPISTERIA

QUATERNONI

Si usano quando il problema raggiunge la singolarità della matrice di trasformazione

Può essere interpretato in 3 modi:
- Un vettore di 4 componenti
- Uno scalare più un vettore in 3 componenti
- Un numero complesso con 3 diverse parti immaginarie
  ⇒ famiglia dei numeri ipercomplessi

$$p = p_0 + p_1 i + p_2 j + p_3 k$$

- Proprietà

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$$
$$ij = -ji = k \qquad jk = -kj = i \qquad ki = -ik = j$$

Proprietà principali

$$q = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k = q_0 + \underline{q}$$

- SOMMA

$$p + q = p_0 + q_0 + \underline{p} + \underline{q} \rightarrow \text{si sommano le componenti}$$

- PRODOTTO

$$p \otimes q = (p_0 + p_1 i + p_2 j + p_3 k)(q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k)$$
$$= (p_0 q_0 - \underline{p} \cdot \underline{q}) + (p_0 \underline{q} + q_0 \underline{p} + \underline{p} \times \underline{q})$$

Il prodotto in generale non è commutativo

Le componenti le pono scrivere anche in forma matriciale

Ulteriori proprietà
- Coniugato $q^* = q_0 - \underline{q}$ e $(p \otimes q)^* = q^* \otimes p^*$
- Norma $N(q) = \sqrt{q^* \otimes q} \Rightarrow q^* \otimes q = q_0^2 + \underline{q} \cdot \underline{q}$
  $\Rightarrow N(q) = \sqrt{q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}$
- Inverso $q^{-1} \otimes q = e$ con $e = 1 + \underline{0}$
  $q^{-1} \otimes q \otimes q^* = q^* \otimes q \otimes q^{-1} = q^*$
  $q \otimes q^* = q^* \otimes q = N(q)^2 \Rightarrow q^{-1} = \frac{q^*}{N^2(q)}$

Rotazione vettore

$$v = (1 - \cos\mu)(\hat{m} \cdot u)\hat{m} + \cos\mu\, u - \sin\mu (\hat{m} \times u)$$
$$v = \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{NM} + \overrightarrow{MV} = (A \cdot \hat{m})\hat{m} + \frac{u - (\hat{m} \cdot u)\hat{m}}{|u - (A \cdot \hat{m})\hat{m}|} |NV| \cos\mu + \frac{u \times \hat{m}}{|u \times \hat{m}|} |NV| \sin\mu$$

TEOREMA DI EULERO

Ogni spostamento di un corpo rigido con un suo punto fisso è equivalente ad una singola rotazione attorno ad un asse che passa per il punto fisso

$$v^a = \underbrace{[(1 - \cos\mu)\hat{m}^a(\hat{m}^a)^T + \cos\mu I - \sin\mu \tilde{m}^a]}_{\text{Tba}} u^a$$

Posso applicare i quaternioni ai vettori
un vettore lo posso rappresentare come un quaternione

$$\underline{u} = 0 + \underline{u} \quad \text{quaternione immaginario}$$

$$v = q^{-1} \otimes u \otimes q \quad \text{con } q = \text{quaternione unitario}$$

$$v = \underbrace{q_0(\underline{q} \cdot \underline{u} - [q_0 \underline{u} - \underline{q} \times \underline{u}) \cdot \underline{q}}_{0} + v$$

Un quaternione unitario lo posso scrivere come

$q = \cos\Theta + \hat{n}\,\mathrm{sen}\,\Theta$ con Θ opportuno

$\Rightarrow v = 2\mathrm{sen}^2\Theta\,(\hat{n}\cdot u)\hat{n} + (\cos^2\Theta - \mathrm{sen}^2\Theta\,\underbrace{\hat{n}\cdot\hat{n}}_{1})u - 2\cos\Theta\,\mathrm{sen}\Theta\,(\hat{n}\times u)$

mentre dalla formula

$v = (1-\cos\mu)(\hat{n}\cdot u)\hat{n} + \cos\mu\, u - \mathrm{sen}\mu\,(\hat{n}\times u)$

che sono uguali se $\Theta = \mu/2 \Leftrightarrow \mu = 2\Theta$

$q = \cos\frac{\mu}{2} + \hat{n}\,\mathrm{sen}\frac{\mu}{2}$ descrive la rotazione di u attorno a $\hat{n}$ di un angolo μ

$\Rightarrow q^{-1} \otimes u \otimes q$ è una rotazione

$\Rightarrow$ matrice di rotazione tra le terne T_a e T_b

$$u^b = \left[2q^a(q^a)^T + (q_0^2 - (q^a)^T\cdot q^a)I - 2q_0\tilde{q}^a\right]u^a$$

con $\tilde{q}^a \triangleq [q^\times] = \begin{bmatrix} 0 & -q_3 & q_2 \\ q_3 & 0 & -q_1 \\ -q_2 & q_1 & 0 \end{bmatrix}$

da cui si ricava T_{ba} in funzione delle componenti del quaternione di rotazione q

e si definiscono i quaternioni unitari relativi agli assi di rollio, cretto e imbardata

$q_\phi = \cos\frac{\phi}{2} + \hat{i}\,\mathrm{sen}\frac{\phi}{2}$ $\quad q_\theta = \cos\frac{\theta}{2} + \hat{j}\,\mathrm{sen}\frac{\theta}{2}$ $\quad q_\psi = \cos\frac{\psi}{2} + \hat{k}\,\mathrm{sen}\frac{\psi}{2}$

master COPY COPISTERIA