LEZIONE 1/3/21

lunedì 1 marzo 2021 08:24

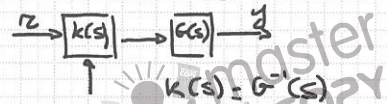
g.mengali@ing.unipi.it

PASSWORD DCVA@WEB per il materiale online

Richiami

Controlli in retroazione

- Robusti verso le incertezze: si comporta bene anche nei confronti di un sistema non perfetto come quello teorico
- Attenuazione disturbi esterni




controllo in ciclo aperto

(in pratica non funziona per: - incertezza di modello
- disturbi)

LTI Systems

SISO LTI

H(s) funzione di trasferimento ← Evans

$$H(s) = \frac{k(s+z_1)(s+z_2)\cdots(s+z_m)}{(s+p_1)(s+p_2)\cdots(s+p_m)}$$

k = guadagno

$-z_i$ = zeri

$-p_i$ = poli

- p = polo complesso

$$F(s) = \frac{a+bs}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2} \longrightarrow s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$$

$$f(t) = 2|c_1| e^{-\zeta\omega_n t}\cos\left(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\,t + \arg|c_1|\right)$$

$\zeta$ = fattore smorzamento $\omega_n$ = pulsazione naturale

- Stabilità Sistemi LTI
  - Stabile se tutti poli reali negativi
  - Stabile neutrale se poli non ripetuti sul $j\omega$-asse
  - Instabile altrimenti

Sistemi primo ordine

$$\tau\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = u(t)$$

$$(\tau s+1)\,Y(s) = U(s) \qquad H(s) = \frac{1/\tau}{s+1/\tau} = \frac{p}{s+p}$$ (p)

$p > 0$

$\sigma = -p$

Sistema secondo ordine

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 2\zeta\omega_n\frac{dy(t)}{dt} + \omega_n^2 y(t) = \omega_n^2 u(t)$$

$$H(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$$

Parametri fondamentali

- Tempo di salita $t_r$ ≙ rise time
  tempo per raggiungere per la prima volta valore di regime

- $M_p \triangleq$ massimo overshoot → scostamento max
- $t_s \triangleq$ tempo di assestamento

Se del 2% tempo che impiega il sistema per stare in una banda del 2% di errore

$$t_r \cong \frac{2}{\omega_n}$$

$$M_p = \frac{y_p - y_\infty}{y_\infty} = e^{-\frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}}$$

$M_p \cong 1 - \frac{\zeta}{0,6}$ per $0 \leq \zeta \leq 0,6$ ma da una buona approssimazione

Poiché solitamente si usano $0,4 < \zeta < 0,6$ è una buona approssimazione

$$t_{s2} \cong \frac{4}{\zeta\omega_n}$$

$\frac{1}{\zeta\omega_n}$ = costante di tempo 2° ordine

$\frac{1}{p}$ = cost. tempo primo ordine

Un aumento elevato di $\zeta$ non è una buona scelta

$t_{sa}$ $0,6 \div 1$ raggiunge il suo valore min il tempo di assestamento

poi tende a risalire

master COPY COPISTERIA

master COPY COPISTERIA

# LEZIONE 2/3/21

martedì 2 marzo 2021 08:36

Aumentare troppo $\zeta$ aumenta i tempi di risposta
⇒ questo è dato dal polo dominante perché se ho reali e distinti mi daranno un andamento $e^{-pt}$ e quindi tende ad aumentare

Il polo con il modulo più piccolo (ovvero quello con $\tau$ più grande) viene chiamato polo dominante

2° ordine puro se al num. c'è solo guadagno

Effetto dello zero

$$H(s) = \frac{\omega_n^2\left(\frac{s}{\alpha\zeta\omega_n}+1\right)}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2} \qquad \text{Zero in } s=-\alpha\zeta\omega_n$$

$$= \underbrace{\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}}_{H_0(s)} + \frac{\frac{s\omega_n^2}{\alpha\zeta\omega_n}}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$$

Riscriverlo così mi dà il vantaggio di poterlo scrivere come somma di due effetti

$$\Rightarrow \quad H(s) = H_0(s) + \frac{1}{\alpha\zeta\omega_n} s\, H_0(s)$$

$$\Rightarrow \quad y(t) = F(t) + \frac{1}{\alpha\zeta\omega_n}\frac{dF(t)}{dt}$$

Da qui ho due casi
$\alpha > 0$ e $\alpha < 0$

⇒ Zero nel L#P: → Sistema a fase minima: il tempo di salita diminuisce, aumenta il picco massimo ma il tempo di assestamento rimane invariato (dipende dalla parte reale del polo che non cambia)
Più $\alpha$ è piccolo e più aumenta il picco massimo $M_p$
Se $\alpha$ maggiore di 3 volte parte reale effetto dello zero trascurabile

⇒ Zero nel R#P: tempo di salita aumenta e anche sovraelongazione e nei primi istanti va minore di zero

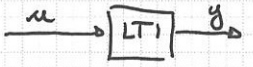
Effetto di un polo aggiuntivo

$$H(s) = \frac{\omega_n^2}{\left(\frac{s}{\alpha\zeta\omega_n}+1\right)\left(s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2\right)}$$

Se $\alpha \to \infty$ secondo ordine puro

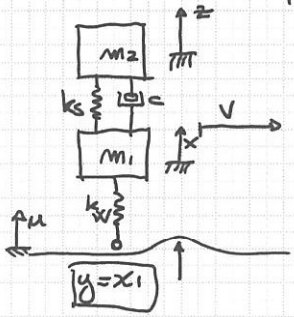
Quando $\alpha$ diventa piccolo la risposta del sistema rallenta

---




Lo posso rappresentare in 2 modi
1) Funzione di trasferimento
2) Eq. diff 1° ordine ⇒ Variabili di stato

Come si fa a passare dall'uno all'altro?




macchina che si muove su una strada sconnessa

$m_1$ massa ruota
$k_w$ elasticità pneumatico
$m_2$ $\frac{1}{4}$ massa auto
$k_s$ e $c$ ammortizzatore
$m_1$ e $m_2$ inizialmente in equilibrio

Scrivendo le eq. diff. ($s^2x$, $sx$, $sz$)

$$\begin{cases} m_1\ddot{x} + k_w(x-u) + k_s(x-z) + c(\dot{x}-\dot{z}) = 0 \\ m_2\ddot{z} + k_s(z-x) + c(\dot{z}-\dot{x}) = 0 \end{cases}$$

Scelgo le variabili di stato — 4° ordine

$x_1 = z \quad x_2 = \dot{z} \quad x_3 = x \quad x_4 = \dot{x}$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ m_2\dot{x}_2 + k_s(x_1 - x_3) + c(x_2 - x_4) = 0 \\ \dot{x}_3 = x_4 \\ m_1\dot{x}_4 + k_w(x_3 - u) + k_s(x_3 - x_1) + c(x_4 - x_2) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{\underline{x}} = A\underline{x} + Bu \\ y = C\underline{x} \end{cases} \qquad \underline{x} \triangleq \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\frac{k_s}{m_2}x_1 - \frac{c}{m_2}x_2 + \frac{k_s}{m_2}x_3 + \frac{c}{m_2}x_4 \\ \dot{x}_3 = x_4 \\ \dot{x}_4 = \text{- - - - -} + \frac{k_w}{m_1}u \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{k_s}{m_2} & -\frac{c}{m_2} & \frac{k_s}{m_2} & \frac{c}{m_2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \text{-} & \text{-} & \text{-} & \text{-} \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{k_w}{m_1} \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \Delta = 0$$

$\frac{d}{dt} \to s$

$$\boxed{\frac{y}{u} = \frac{k_w}{m_1 m_2} \frac{cs + k_w}{(s^4 + a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0)}}$$

$$a_3 = c\,\frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} \qquad a_1 = \frac{k_w c}{m_1 m_2}$$

$$a_2 = \frac{m_1 k_s + m_2(k_w + k_s)}{m_1 m_2} \qquad a_0 = \frac{k_w k_s}{m_1 m_2}$$

$$\frac{y(s)}{u(s)} = H(s) \Rightarrow \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{\frac{k_w}{m_1 m_2}cs + \frac{k_w^2}{m_1 m_2}}{s^4 + a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0} \quad \text{(numeratore: } b_1 s + b_0\text{)}$$

$$y(s)[s^4 + a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0] = u(s)[b_1 s + b_0]$$

$$y^{iv} + a_3\dddot{y} + a_2\ddot{y} + a_1\dot{y} + a_0 y = b_1\dot{u} + b_0 u$$

---

## RISPOSTA IN FREQUENZA

$\sin(\omega_0 t) \to \boxed{G(s)} \to y(t)$ ? a regime

Stabile ?

enumeriamo $G(s)$ con poli distinti

$$Y(s) = G(s)\,U(s) = G(s)\cdot\frac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2} = \sum_{i=1}^{n}\frac{c_i}{s+p_i} + \frac{A}{s-j\omega_0} + \frac{A^*}{s+j\omega_0}$$

$A^*$ → stella indica compl. coniugato

→ Scomposizione in fratti semplici → $(s-j\omega_0)(s+j\omega_0)$

$$A = \lim_{s \to -j\omega_0} Y(s)\,(s - j\omega_0) = G(s)\,\frac{\omega_0}{s+j\omega_0}\Big|_{j\omega_0} = G(j\omega_0)\,\frac{1}{2j}$$

$$A^* = \lim_{s \to -j\omega_0} Y(s)\,(s + j\omega_0) = G(-j\omega_0)\,\frac{\omega_0}{s-j\omega_0}\Big|_{-j\omega_0} = -\underbrace{G(-j\omega_0)}_{G^*(j\omega_0)}\,\frac{1}{2j}$$

$$G(-j\omega_0) = G^*(j\omega_0)$$

$$f(t) \longrightarrow F(s) = \int_0^\infty f(t)\, e^{-st}\, dt$$

$$F^*(s) = \int_0^\infty f(t)\, e^{-s^* t}\, dt = F(s^*)$$

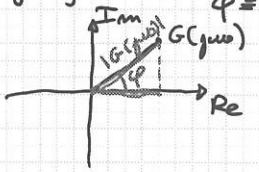
$$\frac{A}{s-j\omega_0} + \frac{A^*}{s+j\omega_0} = \frac{G(j\omega_0)}{2j}\,\frac{1}{s-j\omega_0} - \frac{G^*(j\omega_0)}{2j}\,\frac{1}{s+j\omega_0}$$

$$y(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i\, e^{-p_i t} + \frac{G(j\omega_0)}{2j}\, e^{j\omega_0 t} - \frac{G^*(j\omega_0)}{2j}\, e^{-j\omega_0 t}$$

$$G(j\omega_0) = |G(j\omega_0)|\, e^{j \arg\{G(j\omega_0)\}}$$

$$\varphi \triangleq \arg\{G(j\omega_0)\}$$

$$\sin\theta = \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j}$$




$$\frac{|G(j\omega_0)|}{2j}\, e^{j(\omega_0 t + \varphi)} - \frac{|G(j\omega_0)|}{2j}\, e^{-j(\omega_0 t + \varphi)}$$

$$= |G(j\omega_0)| \sin(\omega_0 t + \varphi)$$

$$\Longrightarrow \boxed{y(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i\, e^{-p_i t} + |G(j\omega_0)| \sin(\omega_0 t + \varphi)} \qquad \arg\{G(j\omega_0)\}$$

Quindi abbiamo ottenuto che la risposta a regime




$$y(t) \overset{A}{=} |G(j\omega_0)| \sin(\omega_0 t + \varphi)$$

uscita sempre sin con stessa pulsazione
però ampiezza è $|G(j\omega_0)|$

la fase non è la stessa ma c'è sfasamento di $\varphi$

tutto dipende da $G(s)\big|_{s=j\omega_0}$




$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

$\omega_n = 0{,}1$ rad/s
$\zeta = 0{,}1$
$\omega_0 = 0{,}2$ rad/s

in matlab

```
s = tf('s')   variabile compl.
[mag, phase] = bode(G, w)
t_fine = 450
[y1, t1] = step(G, t_fine)
[y2, t2] = impulse(Y, t_fine)
plot(t1, y1, t2, y2)
```