DINAMICA E CONTROLLO DEI VEICOLI AEROSPAZIALI

Teoria, Esercizi Svolti e Domande d'esame

Prof. Mengali

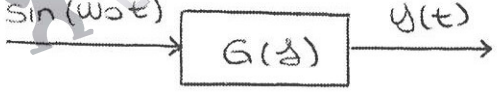
A cura di Sara e Selene

master COPY
master COPY COPISTERIA
master COPY

CAPITOLO 1: RISPOSTA IN FREQUENZA E DIAGRAMMI DI BODE

• RISPOSTA A REGIME AD UN INGRESSO SINUSOIDALE

Consideriamo un sistema LTI, stabile, cioè avente tutti i poli $\in \mathbb{R}^-$, e vediamo qual è la risposta di questo sistema quando in ingresso si pone un segnale sinusoidale di pulsazione ω_0 e ampiezza unitaria del tipo $u(t) = \sin(\omega_0 t)$



master COPY COPISTERIA

Per semplicità assumiamo che $G(s)$ cioè la funzione di trasferimento del sistema, sia di ordine "m", e abbia tutti i poli distinti.

Ricordiamoci che:

$$\mathcal{L}[\sin(\omega_0 t)] = \frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2}$$

posso scrivere:

$$Y(s) = G(s) \cdot \frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2} = \sum_{i=1}^{m} \frac{C_i}{s + p_i} + \frac{A}{s - j\omega_0} + \frac{A^*}{s - j\omega_0}$$

↑ Decomposizione parziale delle frazioni

nota: $s^2 + \omega_0^2 = (s - j\omega_0)(s + j\omega_0)$

con $-p_i$ $(i = 1..m)$ → POLO REALE O COMPLESSO DI $G(s)$

C_i → RESIDUO RELATIVO AL POLO $-p_i$

A e A^* → RESIDUI CONIUGATI E COMPLESSI RELATIVI AI TERMINI $(s - j\omega_0)$ E $(s + j\omega_0)$

dove:

$$A = \lim_{s \to j\omega_0} Y(s)(s - j\omega_0) = \lim_{s \to j\omega_0} G(s) \frac{\omega_0}{(s + j\omega_0)} = G(j\omega) \frac{\omega_0}{2j\omega_0}$$

$$= \frac{G(j\omega_0)}{2j}$$

$$A^* = \lim_{s \to -j\omega_0} Y(s)(s+j\omega_0) = \lim_{s \to -j\omega_0} G(s)\frac{\omega_0}{(s-j\omega_0)} = G(-j\omega_0)\frac{\omega_0}{-2j\omega_0}$$

$$= \frac{G(-j\omega_0)}{-2j}$$

OSSERVAZIONE → $\mathcal{L}[f(t)] = F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}\,dt$

quindi $F^*(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-s^*t}\,dt = F(s)$

Possiamo quindi concludere che $G(-j\omega_0) = G^*(j\omega_0)$ dato che $-j\omega_0$ è il complesso coniugato di $j\omega_0$.

Utilizzando la trasformata inversa di Laplace ottengo la risposta nel tempo:

$$y(t) = \sum_{i=1}^{m} c_i e^{-p_i t} + \frac{G(j\omega_0)}{2j}e^{j\omega_0 t} - \frac{G^*(j\omega_0)}{2j}e^{-j\omega_0 t}$$

con: $G(j\omega_0) = \frac{K(j\omega_0+z_1)\cdot\ldots\cdot(j\omega_0+z_m)}{(j\omega_0+p_1)\cdot\ldots\cdot(j\omega_0+p_m)}$

→ è un numero complesso che ottengo data ω_0, tramite una serie di calcoli, quindi posso scrivere:

$$G(j\omega_0) = |G(j\omega_0)|\,e^{j\arg\{G(j\omega_0)\}}$$
$$G^*(j\omega_0) = |G(j\omega_0)|\,e^{-j\arg\{G(j\omega_0)\}}$$

Per semplificarci la scrittura da ora in poi poniamo $\varphi = \arg\{G(j\omega_0)\}$.

Quindi posso riscrivere la risposta nel tempo come:

$$y(t) = \sum_{i=1}^{m} c_i e^{-p_i t} + |G(j\omega_0)|\underbrace{\frac{e^{j(\omega_0+\varphi)} - e^{-j(\omega_0+\varphi)}}{2j}}_{\text{Per Eulero} = \sin(\omega_0 t+\varphi)}$$

$$= \sum_{i=1}^{m} c_i e^{-p_i t} + |G(j\omega_0)|\sin(\omega_0 t+\varphi)$$

Dal momento che abbiamo ipotizzato che il sistema sia stabile, e sapendo che il termine $\sum_{i=1}^{m} C_i e^{-p_i t}$ è influente solo nel transitorio, possiamo affermare che:

master COPY COPISTERIA

LA RISPOSTA <u>A REGIME</u> DI UN SISTEMA STABILE AD UN INGRESSO SINUSOIDALE È DATA DA:

$$y(t) = |G(j\omega_0)| \sin(\omega_0 t + \arg\{G(j\omega_0)\})$$

QUINDI LA RISPOSTA A REGIME È SEMPRE UNA SINUSOIDE CON STESSA FREQUENZA DI QUELLA IN INGRESSO, MA FASE E AMPIEZZA DIVERSE.

Osservazioni:

1 → Sia la fase che l'ampiezza della sinusoide in uscita differiscono da quelle della sinusoide in ingresso rispettivamente come la fase di $G(j\omega)$ cioè $\arg\{G(j\omega)\}$, il modulo di $G(j\omega)$ cioè $|G(j\omega)|$.

2 → Per la linearità del sistema, se la sinusoide in ingresso ha ampiezza generica A allora anche l'ampiezza della sinusoide in uscita sarà moltiplicata per A.

3 → L'ipotesi che tutti i poli della $G(s) \in \mathbb{R}^-$ è necessaria per garantire che il loro contributo $\to 0$ quando $t \to \infty$, cioè per garantire che: $\lim_{t\to\infty} \sum_{i=1}^{m} C_i e^{-p_i t} = 0$

e che quindi il contributo sia influente solo nel transitorio.
Infatti nel caso di poli $\in \mathbb{I}$ cioè poli immaginari puri, nella $y(t)$ compaiono termini che <u>NON</u> vanno a zero per $t \to \infty$.

4 → L'eventuale presenza di poli multipli $\in \mathbb{R}^-$ la risposta a regime non cambia, cambia solo quella nel transitorio.

5 → Il tempo necessario per ottenere la risposta a regime è approssimativamente $t > 4\tau$ con τ = COSTANTE DI TEMPO DEL POLO DOMINANTE DI $G(s)$ e $\tau \simeq 4/\zeta\omega$.