SISTEMI DI RIFERIMENTO E COORDINATE

Nel piano cartesiano:

$$\vec{v} \begin{cases} \hat{x}\, v\cos\theta \\ \hat{y}\, v\sin\theta \end{cases}$$

Nel piano di Gauss:

$\vec{v}(\rho,\theta) = \rho\hat{r}$ con θ fissato $\quad \theta = \arctan\left(\frac{v_y}{v_x}\right)$

Prodotto scalare e vettoriale

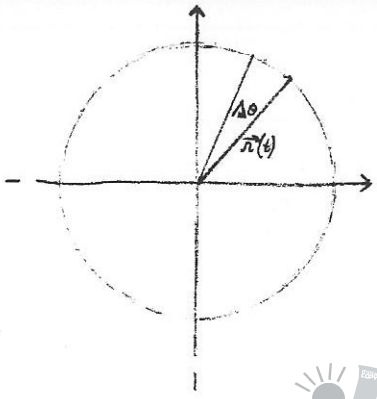
- $\vec{u}\cdot\vec{v} = u\,v\cos(\varphi)$
- $a\,\hat{i}\times b\,\hat{j} = c\,\hat{k}$

$\hat{i} \perp \hat{j}, \hat{k}$
$\hat{k} \perp \hat{i}, \hat{j}$ $\quad c = a\,b\sin(\varphi)$
$\hat{j} \perp \hat{i}, \hat{k}$

$$M_v = \begin{pmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_{ax} & b_y & b_z \end{pmatrix} \quad \det(M_v) = \vec{c}$$

le relazioni vettoriali sono indipendenti dal sistema di riferimento che si ha

VELOCITÁ E ACCELERAZIONI (IN FORMA POLARE)



$$\Delta S = r\,\Delta\theta$$

$$dS = r\,d\theta$$

$$\frac{dS}{dt} = r\frac{d\theta}{dt}$$

$$r\frac{d\theta}{dt} = v_t$$

$$\frac{dS}{dt} \to v$$

$$\frac{d(v\hat{\theta})}{dt} = \vec{a}$$

$$\frac{dv}{dt} = a$$

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt}\hat{\theta} + v\frac{d\hat{\theta}}{dt}$$

$$\begin{cases} \hat{r} = \hat{i}\cos\theta + \hat{j}\sin\theta \\ \hat{\theta} = -\hat{i}\sin\theta + \hat{j}\cos\theta \end{cases}$$

$$\frac{d\hat{\theta}}{dt} = -\cos(\theta)\frac{d\theta}{dt}\hat{i} - \underbrace{\frac{d\hat{i}}{dt}}_{0}\sin(\theta) - \sin(\theta)\frac{d\theta}{dt}\hat{j} + \underbrace{\frac{d\hat{j}}{dt}}_{0}\cos(\theta)$$

$$\frac{d\hat{\theta}}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\left(-\cos(\theta)\hat{i} - \sin(\theta)\hat{j}\right)$$

$$\boxed{\frac{d\hat{\theta}}{dt} = -\hat{r}\frac{d\theta}{dt}}$$

$$\frac{d\hat{r}}{dt} = -\sin(\theta)\frac{d\theta}{dt}\hat{i} + \underbrace{\frac{d\hat{i}}{dt}}_{0}\cos\theta + \cos(\theta)\frac{d\theta}{dt}\hat{j} + \underbrace{\frac{d\hat{j}}{dt}}_{0}\sin(\theta)$$

$$\frac{d\hat{r}}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\left(-\sin(\theta)\hat{i} + \cos(\theta)\hat{j}\right)$$

$$\boxed{\frac{d\hat{r}}{dt} = \hat{\theta}\frac{d\theta}{dt}}$$

$$\vec{r} = r\hat{r}$$

$$\vec{v} = \frac{dr}{dt}\hat{r} + r\hat{\theta}\frac{d\theta}{dt}$$

$$\vec{a} = \frac{d^2r}{dt^2}\hat{r} + \frac{dr}{dt}\hat{\theta}\frac{d\theta}{dt} + \frac{dr}{dt}\hat{\theta}\frac{d\theta}{dt} + r\hat{r}\frac{d\theta^2}{dt} + r\hat{\theta}\frac{d^2\theta}{dt}$$

$$\vec{a} = \hat{r}\left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right) + \hat{\theta}\left(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}\right)$$



se r costante allora:

$$\vec{a} = -\hat{r}\,r\dot{\theta}^2 + \hat{\theta}\,r\ddot{\theta}$$



$$\vec{a} = -\hat{r}\frac{v_t^2}{r} + \hat{\theta}\frac{dv_t}{dt}$$

v_t = velocità tangenziale

$$\vec{a} = -\hat{r}\frac{v_t^2}{r} + \hat{\theta}\,\dot{v}_t$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega \qquad \vec{\omega} = \omega\hat{k}$$

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

$$\frac{d\omega}{dt} = \alpha$$





VELOCITÁ E ACCELERAZIONI

$$\vec{r}_{CA} = \vec{r}_{BA} + \vec{r}_{CB} \xrightarrow{\frac{\partial}{\partial t}} \vec{V}_{CA} = \vec{V}_{BA} + \vec{V}_{CB} \xrightarrow{\frac{d}{dt}} \vec{a}_{CA} = \vec{a}_{BA} + \vec{a}_{CB}$$

sistema immobile: (X, Y, Z) sistema in movimento: (x', y', z')

x e x' coincidono

$$\vec{r}' = \vec{r} - \vec{R}$$

$$x'\hat{i}' + y'\hat{j}' + z'\hat{k}' = (x - X)\hat{i} + (y - Y)\hat{j} + (z - Z)\hat{k}$$

$$\frac{d}{dt}\left(x'\hat{i}' + y'\hat{j}' + z'\hat{k}'\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left((x - X)\hat{i} + (y - Y)\hat{j} + (z - Z)\hat{k}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} y'\hat{j}' = \frac{\partial y'}{\partial t}\hat{j}' + y'\frac{\partial \hat{j}'}{\partial t}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left((y - G)\hat{j}\right) = (y - G)\underbrace{\frac{\partial \hat{j}}{\partial t}}_{0} + \frac{\partial y}{\partial t}\hat{j} - \frac{\partial G}{\partial t}\hat{j}$$

$$\frac{\partial \hat{j}'}{\partial t} = \vec{\omega} \times \hat{j}'$$

$$\frac{\partial}{\partial t} y'\hat{j}' = \frac{\partial y'}{\partial t}\hat{j}' + y'\left(\vec{\omega} \times \hat{j}'\right)$$

$$\frac{dx'}{\partial t}\hat{i}' + \frac{dy'}{\partial t}\hat{j}' + \frac{dz'}{\partial t}\hat{k}' + \vec{\omega} \times x'\hat{i}' + \vec{\omega} \times y'\hat{j}' + \vec{\omega} \times z'\hat{k}' = \frac{\partial (x - X)}{\partial t}\hat{i} + \frac{\partial (y - Y)}{\partial t}\hat{j} + \frac{\partial (z - Z)}{\partial t}\hat{k}$$

$$\frac{\partial x'}{\partial t}\hat{i}' + \frac{dy'}{\partial t}\hat{j}' + \frac{\partial z'}{\partial t}\hat{k}' + \vec{\omega} \times \left(x'\hat{i}' + y'\hat{j}' + z'\hat{k}'\right) = \vec{v} - \vec{V}$$

$$\vec{v}' + \vec{\omega} \times \vec{r}' = v - V$$

$$\frac{\partial \vec{v}'}{\partial t} + \frac{d}{\partial t}\left(\vec{\omega} \times \vec{r}'\right) = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} - \frac{\partial \vec{V}}{dt}$$

$$\vec{\omega} \times \vec{v} + \vec{a}' + \frac{\partial}{dt}\left(\vec{\omega} \times \vec{r}'\right) = a - A$$

$$\vec{\omega}\times\vec{v}'+\vec{a}' + \frac{d}{dt}\vec{\omega}\times\vec{r}' + \vec{\omega}\times\left(\vec{v}' + \vec{\omega}\times\vec{r}'\right) = a - A$$

$$\vec{a}' = a - \left(A + \frac{d\vec{\omega}}{dt}\times\vec{r} + \vec{\omega}\times\left(\vec{\omega}\times\vec{r}\right)\right) - \left(2\vec{\omega}\times\vec{v}'\right)$$

PRINCIPI DI NEWTON

I PRINCIPIO DELLA DINAMICA:

Un corpo isolato, ovvero non sottoposto ad azioni esterne, persiste nel suo stato di quiete, se si trova in quiete, o di moto rettilineo uniforme, se si trova in moto rettilineo uniforme.

II PRINCIPIO DELLA DINAMICA

In un sistema di riferimento inerziale, l'accelerazione subita da un corpo, è proporzionale alla risultante delle forze agenti sul corpo e inversamente proporzionale alla sua massa inerziale.

III PRINCIPIO DELLA DINAMICA

In un sistema di riferimento inerziale, se sul corpo A agisce una forza F_{AB} dovuta all'interazione con il corpo B, allora il corpo A esercita sul corpo B una forza F_{BA} uguale e contraria a F_{AB}.

SISTEMA DI RIFERIMENTO INERZIALE: sistema di riferimento in cui è valido il primo principio della dinamica.

MASSA INERZIALE: misura dell'inerzia di un corpo, ovvero la capacità di opporsi alla sua variazione di moto rettilineo uniforme o di quiete